

第1章 | 場合の数と確率



1章

場合の数と確率

第1節 場合の数

1 集合の要素の個数

A 集合の要素の個数

まとめ

1 集合

「1 から 10 までの自然数の集まり」のように、範囲がはっきりしたものの集まりを 集合 という。

2 集合の要素

集合を構成している 1 つ 1 つのものを、その集合の 要素 という。

3 集合の要素の個数

集合 A の要素の個数が有限であるとき、その個数を $n(A)$ で表す。

空集合 $\emptyset$ は要素が 1 つもない集合であるから、 $n(\emptyset) = 0$ である。

注意 $A \cup B$ は A と B の和集合、 $A \cap B$ は A と B の共通部分、 $\overline{A}$ は A の補集合を表す。

練習 1

教 p.14

教科書の例 1 の集合 U , A , B について、次の個数を求めよ。

- (1) $n(U)$ (2) $n(\overline{B})$ (3) $n(A \cap B)$ (4) $n(\overline{A \cup B})$

指針 集合の要素の個数 教科書 14 ページ例 1 において、全体集合 U は

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, A , B は U の部分集合で、

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ である。

解答 (1) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ であるから

$$n(U) = 6 \quad \text{答}$$

(2) $\overline{B} = \{1, 3, 5\}$ であるから

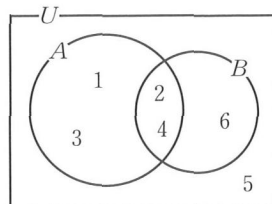
$$n(\overline{B}) = 3 \quad \text{答}$$

(3) $A \cap B = \{2, 4\}$ であるから

$$n(A \cap B) = 2 \quad \text{答}$$

(4) $\overline{A \cup B} = \{5\}$ であるから

$$n(\overline{A \cup B}) = 1 \quad \text{答}$$



和集合、補集合の要素の個数

2つの集合 A , B , および, A の補集合 $\bar{A}$ に対して

$$1 \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

とくに, $A \cap B = \emptyset$ のとき $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

$$2 \quad n(\bar{A}) = n(U) - n(A) \quad \text{ただし, } U \text{ は全体集合}$$

練習
2

教科書の例2の集合 U , A , B について, 次の個数を求めよ。

$$(1) \quad n(\bar{B})$$

$$(2) \quad n(\overline{A \cup B})$$

$$(3) \quad n(\bar{A} \cap \bar{B})$$

教 p.15

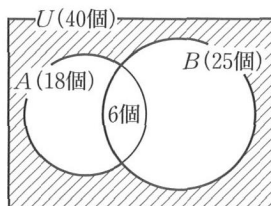
指針 和集合、補集合の要素の個数 教科書 p.15 例2において

$n(U)=40$, $n(A)=18$, $n(B)=25$, $n(A \cap B)=6$ である。

(1), (2) 補集合の要素の個数の公式を用いる。

(2)ではさらに和集合の要素の個数の公式を用いる。

(3) 集合 $\bar{A} \cap \bar{B}$ が右の図でどの部分になるかを考え, 別の表し方について考える。



解答 (1) $n(\bar{B}) = n(U) - n(B) = 40 - 25 = 15$ 答

$$(2) \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 18 + 25 - 6 = 37$$

$$\text{よって } n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 37 = 3 \quad \text{答}$$

(3) $\bar{A} \cap \bar{B}$ は上の図で影をつけた部分であり, $\overline{A \cup B}$ でもある。

$$(2) \text{から } n(\bar{A} \cap \bar{B}) = n(\overline{A \cup B}) = 3 \quad \text{答}$$

B 倍数の個数

倍数の個数

100以下の自然数のうち, 3の倍数全体の集合を A とすると

$$A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 33\}$$

$$\leftarrow 3, 6, 9, \dots, 99$$

と表すことができる。このとき $n(A)=33$

注意 $3 \cdot 1$, $3 \cdot 2$ などにおける $\cdot$ は, 積を表す記号であり, $\times$ と同じ意味である。

練習
3

100以下の自然数のうち, 次のような数はいくつあるか。

(1) 6の倍数

(2) 6の倍数でない数

(3) 4の倍数かつ6の倍数

(4) 4の倍数または6の倍数

教 p.16

指針 倍数の個数 倍数を集合の形で表して、その要素の個数を求める。

解答 100 以下の自然数全体の集合を U とし、 U の部分集合で、6 の倍数全体の集合を A 、4 の倍数全体の集合を B とすると

$$A = \{6 \cdot 1, 6 \cdot 2, 6 \cdot 3, \dots, 6 \cdot 16\}$$

$$\leftarrow 100 \div 6 = 16 \text{ 余り } 4$$

$$B = \{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, 4 \cdot 3, \dots, 4 \cdot 25\}$$

(1) $n(A) = 16$

答 16 個

(2) U の部分集合で、6 の倍数でない数全体の集合は $\bar{A}$ である。

よって $n(\bar{A}) = n(U) - n(A) = 100 - 16 = 84$

答 84 個

(3) U の部分集合で、4 の倍数かつ 6 の倍数全体の集合は $A \cap B$ である。

$A \cap B$ は 12 の倍数全体の集合であるから

$$A \cap B = \{12 \cdot 1, 12 \cdot 2, 12 \cdot 3, \dots, 12 \cdot 8\}$$

よって $n(A \cap B) = 8$

答 8 個

(4) U の部分集合で、4 の倍数または 6 の倍数全体の集合は $A \cup B$ である。

よって $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$= 16 + 25 - 8 = 33$$

答 33 個

C 集合の応用

練習 4

教科書の応用例題 1 について、右のような賛否の人数の表を作った。表の空らんをうめ、次の人数を求めよ。

(1) a にだけ賛成した人

(2) b にだけ賛成した人

	B	$\bar{B}$	合計
A	66		77
$\bar{A}$		5	
合計	84		100

指針 集合の応用 100 人の人に 2 つの提案 a, b をしたところ、a に賛成した人は 77 人、b に賛成した人は 84 人、a にも b にも賛成した人は 66 人いた。この 100 人の集合を U とし、a に賛成した人の集合を A 、b に賛成した人の集合を B として、右の表を作っている。この表では、縦と横のそれぞれの列の和から人数を求めることができる。

	B	$\bar{B}$	合計
A	66	②	77
$\bar{A}$	①	5	④
合計	84	③	100

解答 空らん①は、 $n(\bar{A} \cap B)$ であり、縦の列から $84 - 66 = 18$

空らん②は、 $n(A \cap \bar{B})$ であり、横の列から $77 - 66 = 11$

空らん③は、 $n(\bar{B})$ であり、横の列から $100 - 84 = 16$

空らん④は、 $n(\bar{A})$ であり、縦の列から $100 - 77 = 23$

(1) a にだけ賛成した人は、集合でいうと $A \cap \bar{B}$ であるから、

空らん②より $n(A \cap \overline{B}) = 11$ 答 11人

(2) bだけに賛成した人は、集合でいうと $\overline{A} \cap B$ であるから、

空らん①より $n(\overline{A} \cap B) = 18$ 答 18人

練習
5

教 p.17

あるクラスの生徒 40 人について通学方法を調べたところ、自転車を利用する人が 13 人、バスを利用する人が 16 人、自転車もバスも利用する人が 5 人いた。次の人は何人いるか。

- (1) 自転車もバスも利用しない人
- (2) 自転車は利用するが、バスは利用しない人

指針 集合の応用 クラス 40 人の生徒の集合を全体集合、自転車を利用する人、バスを利用する人の集合それぞれを部分集合として、和集合、補集合の要素の個数を求める。

公式 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$ にあてはめて求める。

解答 クラス 40 人の生徒の集合を全体集合 U とし、
自転車を利用する人の集合を A 、
バスを利用する人の集合を B
とすると

$$n(U) = 40, n(A) = 13, n(B) = 16,$$

$$n(A \cap B) = 5$$

- (1) 自転車もバスも利用しない人の集合は $\overline{A \cup B}$ 、すなわち、 $\overline{A \cup B}$ である。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 13 + 16 - 5 = 24$$

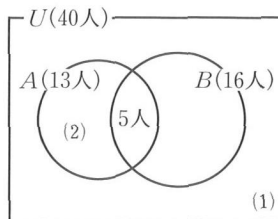
$$\text{よって } n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B)$$

$$= 40 - 24 = 16 \quad \text{答 } 16 \text{ 人}$$

- (2) 自転車は利用するが、バスは利用しない人の集合は $A \cap \overline{B}$ である。

$$n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$= 13 - 5 = 8 \quad \text{答 } 8 \text{ 人}$$



2 場合の数

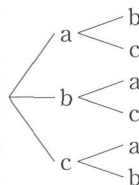
A 樹形図

まとめ

1 樹形図

ある事柄が起こる場合の数を調べるために使われる、次々と枝分かれしていく図を 樹形図 という。樹形図は、起こりうるすべての場合を、もれなくかつ重複なく数え上げるのに便利である。

例 3 個の文字 a, b, c から 2 個の文字を選んで 1 列に並べる。並べ方は、右の図のように 6 通りある。



2 樹形図による場合の数の求め方

樹形図の枝分かれした先端の個数が場合の数になる。
樹形図の一部をかいて、残りを計算により場合の数を求める場合もある。

練習 6

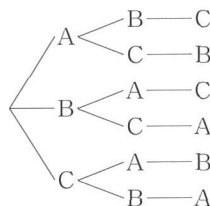
教 p.18

アルファベットの A, B, C の 3 文字を, ACB のように 1 個ずつすべて並べるとき, その並べ方をすべて書き出せ。

指針 樹形図 アルファベット順に並べて書き出してもよいが, 樹形図を利用して, それを書き出した方がより正確にできる。

解答 右の樹形図により

ABC, ACB,
BAC, BCA,
CAB, CBA 答



深める

教 p.19

教科書の例 3 において, 大中小の 3 個のさいころのうち, どれか 1 つでも 5 の目が出ると 3 個の目の和は 6 にはならない。この理由を説明してみよう。

解答 例 大中小の 3 個のさいころのうち, どれか 1 つでも 5 の目が出ると, 目の和は, $5+1+1=7$ より, 7 以上となり, 6 にはならない。

練習
7

大中小の3個のさいころを投げるとき、次の場合は何通りあるか。

- (1) 目の和が5になる場合 (2) 目の積が6になる場合

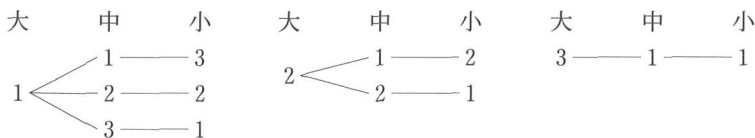
指針 樹形図と場合の数 樹形図をかいて調べる。さいころの目であるから、それぞれ出る目は1から6までの自然数であることに注意する。大、中、小のさいころの目の数を、それぞれ x , y , z とすると

- (1) $x+y+z=5$ (2) $xyz=6$

それぞれを満たす1以上、6以下の自然数の組が何通りあるかという問題になる。 $x=1$ のとき、 $x=2$ のとき、……とするよりは、樹形図で考えた方が効率的であることがわかる。

解答 (1) 下の樹形図により、目の和が5になる場合は

6通り **答**



- (2) 右の樹形図により、目の積が6になる場合は

9通り **答**

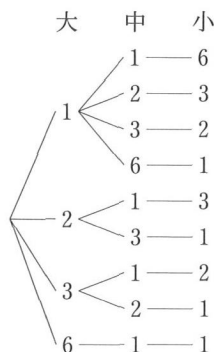
注意 次のように、表をかいて求めることもできる。

(1)

大	1	2	3
中	1 2 3	1 2 1	
小	3 2 1	2 1 1	

(2)

大	1	2	3	6
中	1 2 3 6	1 3 1 2	1	
小	6 3 2 1	3 1 2 1	1	

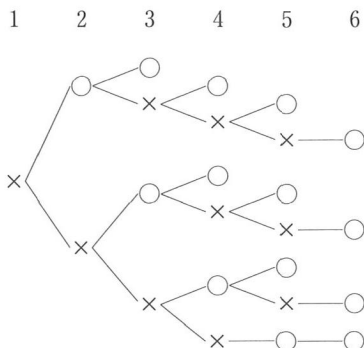
練習
8

教 p.19

1枚の硬貨を繰り返し投げ、表が2回出たら賞品がもらえるゲームをする。ただし、投げられる回数は6回までとし、2回目の表が出たらそれ以降は投げない。1回目に裏が出たとき、賞品がもらえるための表裏の出方の順は何通りあるか。

指針 樹形図と場合の数 表を○，裏を×で表し，樹形図をかいて調べる。

解答 下の樹形図により，賞品がもらえる表裏の出方は **10通り** **答**



B 和の法則

まとめ

和の法則

2つの事柄A，Bは同時には起こらないとする。

Aの起こり方が a 通りあり，Bの起こり方が b 通りあれば，AまたはBの起こる場合は， $a+b$ 通りある。

注意 和の法則は，和集合の要素の個数を求めるときの公式

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

において， $A \cap B = \emptyset$ の場合に対応する。

練習 9

教 p.20

1個のさいころを2回投げるとき，目の和が次のようになる場合は何通りあるか。

(1) 7 または 8

(2) 4 の倍数

指針 和の法則 1個のさいころを2回投げるとき，1回目と2回目に出る目の和は，最小で $1+1=2$ ，最大で $6+6=12$

(1) 目の和が7になる場合と8になる場合には重複はないから，和の法則により

(目の和が7になる場合の数) + (目の和が8になる場合の数)

として求められる。

(2) 目の和が4の倍数になる場合は

[1] 和が4

[2] 和が8

[3] 和が12

の3つに分けられる。この[1], [2], [3]について重複はなく、和の法則は3つ以上の事柄にも成り立つから、それぞれの場合の数の和を求めればよい。

(1), (2)ともあてはまる場合の目の出方を、(3, 5)のように表して場合の数を求める。このとき、右のような表をかくて調べると見落としがない。

和	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

解答 (1) 目の和が7になるのは、

(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)の6通り。

目の和が8になるのは、(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)の5通り。

よって、和の法則により $6+5=11$ **答** 11通り

(2) 目の和が4または8または12になる場合である。

目の和が4になるのは、(1, 3), (2, 2), (3, 1)の3通り。

目の和が8になるのは、(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)の5通り。

目の和が12になるのは、(6, 6)の1通り。

よって、和の法則により $3+5+1=9$ **答** 9通り

C 積の法則

まとめ

積の法則

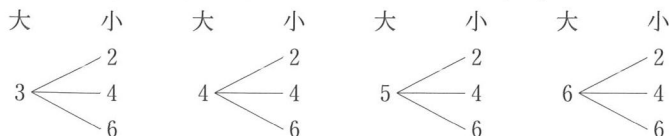
事柄Aの起こり方が a 通りあり、そのどの場合に対しても事柄Bの起こり方が b 通りあれば、Aが起こり、そしてBが起こる場合は、 $a \times b$ 通りある。

練習 10

教 p.21

大小2個のさいころを投げるとき、大きいさいころの目が3以上であり、小さいさいころの目が偶数である場合は何通りあるか。

指針 積の法則 大きいさいころの目が3以上であるから3, 4, 5, 6の4通りあり、そのどの場合に対しても小さいさいころの目が2, 4, 6の3通りずつある。



- 解答** 大きいさいころの目の出方は 3, 4, 5, 6 の 4 通りある。
 そのどの場合に対しても小さいさいころの目の出方は, 2, 4, 6 の 3 通りある。
 よって, 積の法則により $4 \times 3 = 12$ **答** 12 通り

練習 11

教 p.21

次の問いに答えよ。

- (1) 大中小 3 個のさいころを投げるとき, 目の出方は何通りあるか。
 (2) 積 $(a+b)(c+d)(x+y+z)$ を展開すると, 項は何個できるか。

指針 3 つ以上の事柄についての積の法則 3 つ以上の事柄についても, 積の法則が成り立つ。

- 解答** (1) 1 個のさいころで, 目の出方は 6 通りある。
 よって, 積の法則により $6 \times 6 \times 6 = 216$ **答** 216 通り
 (2) a, b の中から 1 つの文字を選ぶ方法は 2 通りあり, そのどの場合に対しても c, d の中から 1 つの文字を選ぶ方法は 2 通りある。また, $(a+b)(c+d)$ を計算して得られる各項に対して, x, y, z の中から 1 つの文字を選ぶ方法は 3 通りある。
 よって, 展開した式の項の個数は, 積の法則により
 $2 \times 2 \times 3 = 12$ **答** 12 個

まとめ

約数の個数

素因数分解して素数の積で表して考える。

例 108 の正の約数の個数を求める。

$108 = 2^2 \cdot 3^3$ であるから, 108 の正の約数は, 2^2 の正の約数と 3^3 の正の約数の積で表される。

2^2 の正の約数は 1, 2, 2^2 の 3 個。

3^3 の正の約数は 1, 3, 3^2 , 3^3 の 4 個。

よって, 108 の正の約数の個数は, 積の法則により

$$3 \times 4 = 12 \text{ (個)}$$

練習 12

教 p.22

次の数について, 正の約数は何個あるか。

- (1) 16 (2) 144 (3) 504

指針 約数の個数 素因数分解して考える。

解答 (1) $16=2^4$ であるから、16 の正の約数は

1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 答 5 個

(2) $144=2^4 \cdot 3^2$ であるから、144 の正の約数は、 2^4 の正の約数と 3^2 の正の約数の積で表される。

2^4 の正の約数は 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 の 5 個ある。

3^2 の正の約数は 1, 3, 3^2 の 3 個ある。

よって、積の法則により $5 \times 3 = 15$ 答 15 個

(3) $504=2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ であるから、504 の正の約数は、 2^3 の正の約数と 3^2 の正の約数と 7 の正の約数の積で表される。

2^3 の正の約数は 1, 2, 2^2 , 2^3 の 4 個ある。

3^2 の正の約数は 1, 3, 3^2 の 3 個ある。

7 の正の約数は 1, 7 の 2 個ある。

よって、積の法則により $4 \times 3 \times 2 = 24$ 答 24 個

3 順列

A 順列の総数

まとめ

1 順列

いくつかのものを順に 1 列に並べるとき、その並びの 1 つ 1 つを 順列 という。

2 n 個から r 個取る順列

異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して並べる順列を n 個から r 個取る順列 といい、その総数を ${}_nP_r$ で表す。ただし、 $r \leq n$ である。

3 順列の総数 ${}_nP_r$

n 個から r 個取る順列の総数 ${}_nP_r$ について

$${}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}_{r \text{ 個}}$$

注意 ${}_nP_r$ の P は、「順列」を意味する英語 permutation の頭文字である。

教 p.24

練習 13

次の値を求めよ。

(1) ${}_5P_2$

(2) ${}_8P_4$

(3) ${}_3P_1$

(4) ${}_6P_6$

指針 ${}_nP_r$ の計算 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ にあてはめて計算する。

- 解答 (1) ${}_5P_2 = 5 \cdot 4 = 20$ 答
 (2) ${}_8P_4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ 答
 (3) ${}_3P_1 = 3$ 答
 (4) ${}_6P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ 答

教 p.24

練習
14

次のものの総数を求めよ。

- (1) 10 人の生徒から 3 人を選んで 1 列に並べるときの並び順
 (2) 7 個の数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 のうちの異なる 4 個を並べて作る 4 桁の整数

指針 順列の総数 異なる n 個のものから異なる r 個を取って 1 列に並べる順列の総数は ${}_nP_r$

- 解答 (1) ${}_{10}P_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ 答 720 通り
 (2) ${}_7P_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ 答 840 通り

まとめ

1 n の階乗

順列の総数 ${}_nP_r$ の式で、とくに $r=n$ のときは、等式

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

が得られる。

この等式の右辺は、1 から n までのすべての自然数の積である。これを n の階乗 といい、 $n!$ で表す。

$${}_nP_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

2 すべてを並べる順列の総数

異なる n 個のものをすべてを並べる順列の総数は $n!$

注意 階乗の記号を用いると、 ${}_nP_r$ は次のように書ける。

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{ただし, } {}_nP_0 = 1, 0! = 1 \text{ と定める。}$$

$$\text{例 } {}_6P_3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4$$

教 p.25

練習
15

次のような並べ方の総数を求めよ。

- (1) 5 個の数字 1, 2, 3, 4, 5 のすべてを 1 列に並べる。
 (2) 7 個の文字 A, B, C, D, E, F, G のすべてを 1 列に並べる。

指針 階乗 $n!$ 異なる n 個のものをすべてを並べる順列の総数は $n!$ 通り。

- 解答 (1) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ 答 120 通り
 (2) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ 答 5040 通り

B 順列の考え方の利用

練習
16

12 色の色鉛筆がある。右の図のような 3 つの文字を、すべて異なる色で塗り分けるとき、塗り方は何通りあるか。

ABC

教 p.25

指針 順列の総数 12 色から 3 色を選んで、A, B, C の順に並べる場合であるから、12 色から 3 色を選んで並べる順列の総数を求める。

解答 12 色から 3 色を選んで 1 列に並べる順列の総数と同じであるから、塗り方の総数は

$${}_{12}P_3 = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320 \quad \text{答} \quad 1320 \text{ 通り}$$

練習
17

母音 a, i, u, e, o と子音 k, s, t の 8 個を 1 列に並べるとき、次のような並べ方は何通りあるか。

- (1) 両端が母音である。 (2) 母音 5 個が続いて並ぶ。

教 p.26

指針 条件付きの順列 並べ方に条件がつくとき、その部分を別に考えて積の法則を使う。

- (1) 両端が母音のとき

母 ○ ○ ○ ○ ○ 母
残り 6 個

① まず、両端の母音の並べ方が ${}_5P_2$ 通り。

② 次に、残り 6 個の並べ方が $6!$ 通り。

③ 積の法則により ${}_5P_2 \times 6!$ 通り。

- (2) すべての母音が続いて並ぶとき

子 母 母 母 母 母 子
母音 5 個

① 5 個の母音を 1 個とみなして、

子音 3 個と合わせて 4 個の並べ方が $4!$ 通り。

② 5 個の母音の並べ方が $5!$ 通り。

③ 積の法則により $4! \times 5!$ 通り。

解答 (1) 両端の母音 2 個の並べ方は、 ${}_5P_2$ 通りある。

そのどの場合に対しても、間に並ぶ残り 6 個(母音 3 個、子音 3 個)の並べ方は、 $6!$ 通りある。

よって、並べ方の総数は、積の法則により

$${}_5P_2 \times 6! = 5 \cdot 4 \times 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$= 14400 \quad \text{答} \quad 14400 \text{ 通り}$$

条件がついているものを先に並べるといいよ。



- (2) 母音 5 個をひとまとめにする。

子音 3 個と母音ひとまとめの並べ方は、4! 通りある。

そのどの場合に対しても、ひとまとめにした母音 5 個の並べ方は、5! 通りある。

よって、並べ方の総数は、積の法則により

$$4! \times 5! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$= 2880 \quad \text{答} \quad 2880 \text{ 通り}$$

教 p.27

練習
18

5 個の数字 0, 1, 2, 3, 4 のうちの異なる 4 個を並べて、4 桁の整数を作るとき、次のような整数は何個作れるか。

- (1) 4 桁の整数 (2) 4 桁の奇数 (3) 4 桁の偶数

指針 条件付きの順列 まず、千の位には 0 以外の 4 個の数字から 1 つ選ぶ。残り百、十、一の位には、残った 4 個の数字を並べる。

- (3) (1), (2)の結果を利用する。

解答 (1) 千の位は、0 以外の数字 1, 2, 3, 4 のどれかであるから、その選び方は 4 通りある。そのどの場合に対しても、百、十、一の位には、残り 4 個の数字から 3 個取って並べるから、その並べ方は ${}_4P_3$ 通りある。

よって、求める個数は、積の法則により

$$4 \times {}_4P_3 = 4 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96 \quad \text{答} \quad 96 \text{ 個}$$

- (2) 一の位は、数字 1, 3 のいずれかであるから、その選び方は 2 通りある。

そのどの場合に対しても、千の位は、0 と一の位の数字以外の 3 個の数字のどれかであるから、その選び方は 3 通りある。

さらに、百、十の位には、残り 3 個の数字から 2 個取って並べるから、その並べ方は ${}_3P_2$ 通りある。

よって、求める個数は、積の法則により

$$2 \times 3 \times {}_3P_2 = 2 \times 3 \times 3 \cdot 2 = 36 \quad \text{答} \quad 36 \text{ 個}$$

- (3) 4 桁の偶数は、4 桁の整数から 4 桁の奇数を除いたものであるから、(1), (2)より、求める個数は

$$96 - 36 = 60 \quad \text{答} \quad 60 \text{ 個}$$

整数を作る問題では、最高位の数字は 0 にはならないことに注意しよう。



別解 (3) 一の位は、数字 0, 2, 4 のどれかである。

[1] 一の位の数字が 0 の場合

千、百、十の位には、残り 4 個の数字から 3 個取って並べるから、その並べ方は ${}_4P_3$ 通りある。

[2] 一の位の数字が 2, 4 の場合

千の位は、0 と一の位の数字以外の 3 個の数字のどれかであるから、その選び方は 3 通りある。

そのどの場合に対しても、百、十の位には、残り 3 個の数字から 2 個取って並べるから、その並べ方は ${}_3P_2$ 通りある。

[1], [2] から、求める個数は、積の法則と和の法則により

$${}_4P_3 + 2 \times 3 \times {}_3P_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \times 3 \times 3 \cdot 2 = 60 \quad \text{答} \quad 60 \text{ 個}$$

C 円順列

まとめ

1 円順列

いくつかのものを円形に並べる順列を 円順列 という。

円順列では、回転して並びが同じになるものは同じ並び方とみなす。

2 円順列の総数

異なる n 個のものの円順列の総数は $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

練習 19

色の異なる 6 個の玉を円形に並べて置くと、並べ方の総数を求めよ。

教 p.29

指針 円順列 異なる n 個のものの円順列の総数は $(n-1)!$ 通り。

解答 異なる 6 個の円順列であるから

$$(6-1)! = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \quad \text{答} \quad 120 \text{ 通り}$$

練習 20

大人 5 人と子ども 5 人が輪の形に並ぶとき、大人と子どもが交互に並ぶような並び方は何通りあるか。

教 p.29

指針 条件つき円順列 大人が円形に並んで、間に子どもが並んでいくと考える。特定の大人に着目すると、間に入る子どもの並び方はふつうの順列と考えられる。

解答 大人 5 人の円順列の総数は $(5-1)!$ 通り。

子ども 5 人が大人の間に 1 人ずつ並ぶ方法は $5!$ 通り。

よって、並び方の総数は、積の法則により

$$(5-1)! \times 5! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2880$$

答 2880 通り

練習 21

教 p.29

A, B, C, D, E, F の 6 人が、円形の 6 人席のテーブルに着席するとき、A と B が隣り合うような並び方は何通りあるか。

方針 条件つき円順列 A と B 2 人をひとまとめに 1 人と考えて、5 人を丸いテーブルに着席させ、そのどの場合に対しても、A と B 2 人の並び方を考える。

解答 A と B 2 人を 1 人と考えて、A, B 以外の 4 人と A と B をひとまとめにした 1 人の円順列の総数は $(5-1)!$ 通り。

そのどの場合に対しても、A と B 2 人の並び方は $2!$ 通り。

よって、並び方の総数は、積の法則により

$$(5-1)! \times 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1 = 48 \quad \text{答} \quad 48 \text{ 通り}$$

別解 1 まず、B 以外が円形に並び、そのあとで B が並ぶと考える。

A, C, D, E, F の円順列の総数は、 $(5-1)!$ 通りある。

そのどの場合に対しても、B の並ぶ位置は、A の両隣の 2 通りの場合がある。

よって、並び方の総数は、積の法則により

$$(5-1)! \times 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 = 48 \quad \text{答} \quad 48 \text{ 通り}$$

別解 2 まず、A, B が両端になるように、6 人が 1 列に並び、その両端をつなげて輪の形にすると考える。よって、求める並び方の総数は、A, B が両端になるように、6 人が 1 列に並ぶ並び方の総数を求めて

$${}_2P_2 \times {}_4P_4 = 2! \times 4! = 2 \cdot 1 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48 \quad \text{答} \quad 48 \text{ 通り}$$

D 重複順列

まとめ

1 重複順列

異なる n 種類のものから重複を許して r 個取って並べる順列を、 n 個から r 個取る重複順列 という。

$\leftarrow r > n$ でもよい。

2 重複順列の総数

n 個から r 個取る重複順列の総数は n^r

教 p.30

練習 22

4 個の文字 a, b, c, d を、重複を許して次の個数だけ 1 列に並べるとき、何通りの文字列が作れるか。

(1) 2 個

(2) 3 個

指針 重複順列 重複が許されるから、(1)では、aa, bb など、(2)では aaa, bcc など
が順列に含まれる。4 個の文字から重複を許して r 個取って並べる順列の
総数は 4^r 通り。

解答 (1) 4 個から 2 個取る重複順列であるから $4^2=4 \times 4=16$ **答** 16 通り

(2) 4 個から 3 個取る重複順列であるから $4^3=4 \times 4 \times 4=64$ **答** 64 通り

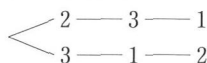
コラム 完全順列

練習

教 p.31

3 個, 4 個の完全順列の総数を, 樹形図を用いるなどして求めてみよう。また, 教科書 31 ページの会話を参考に 5 個の完全順列の総数を求めてみよう。

解答 3 個の完全順列の総数は, 下の樹形図から 2 通り **答**



4 個の完全順列の総数は, 右の樹形図から

9 通り **答**

5 個の完全順列の総数について考える。

AさんとBさんの会話から, 2 を 1 番目と
するとき,

1 が 2 番目にある完全順列の総数は, 3 個の
完全順列の総数に等しく, 2 通りある。

1 が 2 番目でない完全順列の総数は, 4 個の
完全順列の総数に等しく, 9 通りある。

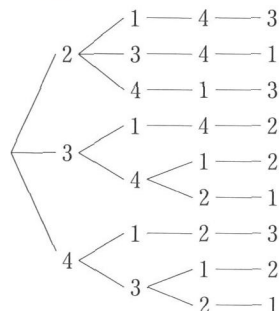
よって, 2 が 1 番目である 5 個の完全順列の総数は 11 通り。

3 を 1 番目とすると, 1 が 3 番目にあるとすると, 残りの 2, 4, 5 を 2 番
目, 4 番目, 5 番目に並べるから, 3 個の完全順列の総数に等しく, 2 通りあ
る。1 が 3 番目でないときは, 4 個の完全順列の総数に等しく, 9 通りある。

よって, 3 が 1 番目である 5 個の完全順列の総数は 11 通り。

4, 5 が 1 番目にあるときも同じように考えることができるから, 5 個の完全
順列の総数は $11+11+11+11=44$ **答** 44 通り

参考 一般に, n 個の完全順列の個数を $A(n)$ で表すと, n は 2 以上であるから,
 $A(n+1)=n\{A(n)+A(n-1)\}$ で表される。上の問題にあてはめると,
 $A(5)=4\{A(4)+A(3)\}=4(9+2)=44$



4 組合せ

A 組合せの総数

まとめ

1 組合せ

ものを取り出す順序を考えずに組を作るとき、これらの組の1つ1つを 組合せ という。

2 n 個から r 個取る組合せ

異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して作る組合せを n 個から r 個取る組合せ といい、その総数を ${}_nC_r$ で表す。

ただし、 $r \leq n$ である。

← ${}_nC_r$ の C は、「組合せ」を意味する英語 combination の頭文字である。

3 組合せの総数 ${}_nC_r$

n 個から r 個取る組合せの総数 ${}_nC_r$ について

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1) \cdots (n-r+1)}^{r \text{ 個}}}{\underbrace{r(r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{r \text{ 個}}}$$

とくに、 ${}_nC_1 = n$ 、 ${}_nC_n = 1$ である。また、等式 ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ を用いると、

${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ とも表される。ただし、 ${}_nC_0 = 1$ と定める。

練習
23

教 p.33

次の値を求めよ。

(1) ${}_7C_3$

(2) ${}_4C_2$

(3) ${}_8C_1$

(4) ${}_5C_5$

指針 ${}_nC_r$ の計算 ${}_nC_r = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r(r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$ にあてはめて計算する。

分母、分子とも r 個の数の積になっていることを確認する。

解答 (1) ${}_7C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

答

(2) ${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$

答

(3) ${}_8C_1 = \frac{8}{1} = 8$

答

← ${}_nC_1 = n$

(4) ${}_5C_5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$

答

← ${}_nC_n = 1$

練習
24

次のような選び方の総数を求めよ。

- (1) 8人から2人を選ぶ。 (2) 7色から4色を選ぶ。

指針 組合せの総数 異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して作る組合せの総数は ${}_nC_r$

解答 (1) ${}_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ **答** 28通り

(2) ${}_7C_4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ **答** 35通り

B ${}_nC_r$ の性質

まとめ

 ${}_nC_r$ の性質

n 個から r 個取る組合せの総数は、 n 個から $(n-r)$ 個取る組合せの総数に等しい。すなわち ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

例 ${}_{12}C_{10} = {}_{12}C_{12-10} = {}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$

練習
25

次の値を求めよ。

- (1) ${}_5C_4$ (2) ${}_9C_6$ (3) ${}_{20}C_{18}$

指針 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ の利用 r と $n-r$ を比べて小さい方で計算する。

(1) ${}_nC_1 = n$

解答 (1) ${}_5C_4 = {}_5C_{5-4} = {}_5C_1 = 5$ **答**

(2) ${}_9C_6 = {}_9C_{9-6} = {}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ **答**

(3) ${}_{20}C_{18} = {}_{20}C_{20-18} = {}_{20}C_2 = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190$ **答**

C 組合せの考え方の利用練習
26

正六角形について、次の数を求めよ。

- (1) 3 個の頂点を結んでできる三角形の個数
(2) 2 個の頂点を結ぶ線分の本数
(3) 対角線の本数

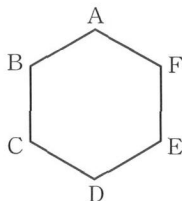
指針 図形と組合せ それぞれの図形がどのようにしてできるかを考える。

- (1) どの 3 点も同じ直線上にないとき、3 点の 1 組と三角形 1 個が対応する。

- (2) 異なる2点の1組があれば1本の線分ができる。
 (3) (2)の2個の頂点を結ぶ線分の中には、正六角形の辺が含まれている。したがって、(2)の結果から辺の数を引けばよい。

解答 (1) 6個の頂点はどの3点も一直線上にはないから、
 3個の点を1組決めて結ぶと三角形が1個できる。
 よって、できる三角形の個数は

$${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \quad \text{答} \quad 20 \text{ 個}$$



- (2) 6個の頂点から2個の点を1組決めて結ぶと線分が1本できる。

よって、できる線分の本数は ${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ **答** 15本

- (3) (2)で求めた線分の本数から、正六角形の辺の数6を引けばよい。

よって、求める対角線の本数は $15 - 6 = 9$ **答** 9本

参考 (3) n 角形の対角線の本数は

$${}_nC_2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2} \text{ (本)}$$



深める

教 p.35

教科書の応用例題7(2)を、子どもが1人、2人、3人、4人の各場合の数を計算して解いてみよう。

指針 各場合の数を求め、和の法則を利用する。

解答 子どもが1人含まれる場合、選び方の総数は

$${}_6C_4 \times {}_4C_1 = {}_6C_2 \times {}_4C_1 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times 4 = 15 \times 4 = 60 \text{ (通り)}$$

子どもが2人含まれる場合、選び方の総数は

$${}_6C_3 \times {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 20 \times 6 = 120 \text{ (通り)}$$

子どもが3人含まれる場合、選び方の総数は

$${}_6C_2 \times {}_4C_3 = {}_6C_2 \times {}_4C_1 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times 4 = 15 \times 4 = 60 \text{ (通り)}$$

子どもが4人含まれる場合、選び方の総数は ${}_6C_1 \times {}_4C_4 = 6 \times 1 = 6$ (通り)

したがって、子どもが少なくとも1人は含まれる選び方の総数は

$$60 + 120 + 60 + 6 = 246 \quad \text{答} \quad 246 \text{ 通り}$$

練習
27

大人 3 人、子ども 5 人の中から、4 人を選ぶとき、次のような選び方は何通りあるか。

- (1) 大人 2 人と子ども 2 人を選ぶ。
- (2) 大人が少なくとも 1 人は含まれるように選ぶ。

指針 条件付きの組合せ

- (1) 大人 2 人の選び方のそれぞれに対して、子ども 2 人の選び方がある。
- (2) 8 人から 4 人の選び方から、4 人とも子どもとなる選び方を除く。

解答 (1) 大人 2 人の選び方は ${}_3C_2$ 通りあり、そのどの場合に対しても、子ども 2 人の選び方は ${}_5C_2$ 通りある。

よって、求める選び方の総数は、積の法則により

$${}_3C_2 \times {}_5C_2 = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 30 \quad \text{答} \quad 30 \text{ 通り}$$

- (2) 8 人から 4 人の選び方は ${}_8C_4$ 通りある。

大人が 1 人も選ばれず、4 人とも子どもとなる選び方は ${}_5C_4$ 通りある。

よって、求める選び方の総数は

$${}_8C_4 - {}_5C_4 = {}_8C_4 - {}_5C_1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 5 = 65 \quad \text{答} \quad 65 \text{ 通り}$$

D 組分けの総数

練習
28

8 人を次のように分けるとき、分け方は何通りあるか。

- (1) A, B, C, D の 4 つの組に、2 人ずつ分ける。
- (2) 2 人ずつの 4 つの組に分ける。
- (3) 3 人, 3 人, 2 人の 3 つの組に分ける。

指針 組分け 組に名前をつけて分ける方が組分けの総数を求めやすい。

- (1) A の 2 人を選び、残り 6 人から B の 2 人を選び、さらに残り 4 人から C の 2 人を選ぶ。このとき、D の 2 人は決まる。
- (2) 2 人ずつの 4 つの組に分けたものに組の名前をつけるとすれば、分け方の 1 通りにつき $4!$ 通りずつある。
- (2) の総数 $\times 4! = (1)$ の総数 となることから、(2) の総数を求める。
- (3) 3 つの組の分け方で、3 人の組の区別がない場合である。

解答 (1) A の 2 人の選び方は、 ${}_8C_2$ 通りある。

残りの 6 人から B の 2 人の選び方は、 ${}_6C_2$ 通りある。

さらに残りの 4 人から C の 2 人の選び方は、 ${}_4C_2$ 通りある。

A, B, C が決まれば、残りの D の 2 人は決まる。

よって、分け方の総数は、積の法則により

$${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \times \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 2520 \quad \text{答} \quad 2520 \text{通り}$$

(2) (1)の分け方で、A, B, C, Dの区別をなくせばよい。

1つの組の分け方に4!通りの名前のつけ方がある。

$$\text{よって、分け方の総数は} \quad \frac{2520}{4!} = \frac{2520}{24} = 105 \quad \text{答} \quad 105 \text{通り}$$

(3) 2つの3人の組をA, B, 2人の組をCとする。

Aの3人の選び方は、 ${}_8C_3$ 通りある。

残りの5人からBの3人の選び方は、 ${}_5C_3$ 通りある。

A, Bが決まれば、Cの2人は決まる。

$$\text{よって、分け方の総数は} \quad {}_8C_3 \times {}_5C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$$

ここで、AとBの区別をなくすと、2!通りずつ同じ組分けができる。

$$\text{よって、求める分け方の総数は} \quad \frac{560}{2!} = 280 \quad \text{答} \quad 280 \text{通り}$$

E 同じものを含む順列

まとめ

同じものを含む順列の総数

aがp個, bがq個, cがr個あるとき, それら全部を1列に並べる順列の総数は

$${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q = \frac{n!}{p!q!r!} \quad \text{ただし} \quad p+q+r=n$$

注意 $r=0$ のときは, ${}_{n-p}C_q=1$ であり, 順列の総数は ${}_nC_p = \frac{n!}{p!q!}$ である。

練習
29

教 p.38

BANANAの6文字をすべて使って文字列を作るとき, 何通りの文字列が作れるか。

指針 同じものを含む順列 Aが3個, Nが2個, Bが1個の順列である。

同じものを含む順列の総数の公式 $\frac{n!}{p!q!r!}$ において

$n=6, p=3, q=2, r=1$ とする。

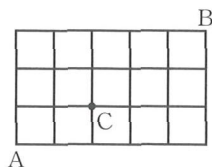
解答 Aが3個, Nが2個, Bが1個あり, これらを1列に並べるから

$$\frac{6!}{3!2!1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1 \times 1} = 60 \quad \text{答} \quad 60 \text{通り}$$

練習
30

右の図のような道のある地域で、次のような最短の道順は何通りあるか。

- (1) AからBまで行く。
- (2) AからCを通してBまで行く。
- (3) AからCを通らずにBまで行く。



指針 最短の道順の総数 上へ1区画進むことを↑、右へ1区画進むことを→で表すと、それぞれの道順は、→と↑の順列で表される。

解答 (1) AからBへ行く最短の道順は、↑3個と→5個の順列で表される。
よって、求める最短の道順の総数は

$$\frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \quad \text{答} \quad 56 \text{通り}$$

- (2) AからCへ行く最短の道順は、↑1個と→2個の順列で表される。
CからBへ行く最短の道順は、↑2個と→3個の順列で表される。
よって、求める最短の道順の総数は、積の法則により

$$\frac{3!}{1!2!} \times \frac{5!}{2!3!} = 3 \times 10 = 30 \quad \text{答} \quad 30 \text{通り}$$

- (3) AからBへ行く最短の道順は、(1)より56通り。
このうち、Cを通るものが、(2)より30通りあるから、求める最短の道順の総数は $56 - 30 = 26$ 答 26通り

研究 重複を許して作る組合せ

まとめ

重複を許して作る組合せ

異なる n 個のものから重複を許して r 個取って作る組合せの総数は、 r 個の○と $(n-1)$ 個の|を並べる順列の総数に等しい。すなわち、 $\{r+(n-1)\}$ 個の場所から r 個の場所を選ぶ方法の総数に等しい。

よって、その総数は $\frac{\{r+(n-1)\}!}{r!(n-1)!}$ すなわち ${}_{n+r-1}C_r$

練習
1

教 p.41

- (1) 4個の文字 a, b, c, d から重複を許して7個取る組合せの総数を求めよ。
- (2) $(a+b+c)^6$ の展開式の異なる項の数を求めよ。

指針 重複を許して作る組合せ

- (1) 重複を許す場合の組合せの総数 ${}_{n+r-1}C_r$ で、 $n=4$, $r=7$ である。
 (2) $(a+b+c)^6$ の展開式の異なる項の数は、3 個の文字から重複を許して 6 個取って作る組合せの総数に等しい。

解答 (1) 4 個の文字から重複を許して 7 個取る組合せの総数は、7 個の○と 3 個の | を並べる順列の総数に等しいから、求める総数は

$${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \quad \text{答} \quad 120 \text{ 通り}$$

- (2) 3 個の文字から重複を許して 6 個取る組合せの総数は、6 個の○と 2 個の | を並べる順列の総数に等しいから、求める項の数は

$${}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \quad \text{答} \quad 28 \text{ 個}$$

練習 2

教 p.41

等式 $x+y+z=10$ を満たす負でない整数 x , y , z の組は、全部で何個あるか。

指針 等式を満たす負でない整数の組 等式 $x+y+z=10$ を満たす負でない整数 x , y , z の組の個数は、3 個の文字 a , b , c から重複を許して、 a を x 個、 b を y 個、 c を z 個取って合計 10 個にする方法の総数と同じである。

解答 等式 $x+y+z=10$ を満たす負でない整数 x , y , z の組の個数は、異なる 3 個のもののから重複を許して 10 個取る組合せの総数に等しい。
異なる 3 個のもののから重複を許して 10 個取る組合せの総数、すなわち 10 個の○と 2 個の | を並べる順列の総数に等しいから

$${}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66 \quad \text{答} \quad 66 \text{ 個}$$

別解 $x+1=X$, $y+1=Y$, $z+1=Z$ とおくと、 $X \geq 1$, $Y \geq 1$, $Z \geq 1$

$x=X-1$, $y=Y-1$, $z=Z-1$ を $x+y+z=10$ に代入して整理すると
 $X+Y+Z=13$

13 個の○を並べる：○○○○○○○○○○○○○○○

このとき、○と○の間の 12 か所から 2 つを選んで仕切りを入れ $A|B|C$ としたときの、 A , B , C の部分にある○の数をそれぞれ X , Y , Z とすると、組が 1 つ決まる。

よって、正の整数 X , Y , Z の組は

$${}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66 \text{ (個)}$$

したがって、求める負でない整数 x , y , z の組は 66 個 答

第1章 第1節

問題

教 p.42

- 1 1 から 100 までの自然数のうち、3 と 4 の少なくとも一方で割り切れる数は何個あるか。

指針 倍数の個数 3 と 4 の少なくとも一方で割り切れる数は、3 の倍数または 4 の倍数で、 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ で求める。

解答 1 から 100 までの自然数全体の集合を U 、 U の部分集合で、3 の倍数全体の集合を A 、4 の倍数全体の集合を B とすると

$$A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 33\}$$

$$B = \{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, 4 \cdot 3, \dots, 4 \cdot 25\}$$

$$A \cap B = \{12 \cdot 1, 12 \cdot 2, 12 \cdot 3, \dots, 12 \cdot 8\}$$

$$n(A) = 33, n(B) = 25, n(A \cap B) = 8$$

求めるのは $n(A \cup B)$ である。

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 33 + 25 - 8 = 50 \quad \text{答} \quad 50 \text{ 個} \end{aligned}$$

教 p.42

- 2 大小 2 個のさいころを投げるとき、次の場合は何通りあるか。

(1) 目の積が偶数になる。

(2) 目の和が偶数になる。

指針 和の法則、積の法則

(1) 積が偶数になるのは、(大, 小)の目が(偶数, 奇数), (奇数, 偶数), (偶数, 偶数)の 3 つの場合に分けられる。それぞれの場合の数は、積の法則で求める。また、これら 3 つの場合には重複はないから、それぞれの場合の数の和を求めればよい。

(2) 和が偶数になるのは、(大, 小)の目が(偶数, 偶数), (奇数, 奇数)の 2 つの場合に分けられる。(1)と同様に、積の法則と和の法則を用いて求める。

解答 (1) 1 個のさいころで、偶数の目は 3 通り、奇数の目も 3 通りある。

積が偶数になるのは、(大, 小)の目が

(偶数, 奇数)のとき $3 \times 3 = 9$ (通り)

(奇数, 偶数)のとき $3 \times 3 = 9$ (通り)

(偶数, 偶数)のとき $3 \times 3 = 9$ (通り)

よって、和の法則により $9 + 9 + 9 = 27$ 答 27 通り

(2) 和が偶数になるのは、(大, 小)の目が

(偶数, 偶数)のとき $3 \times 3 = 9$ (通り)

(奇数, 奇数)のとき $3 \times 3 = 9$ (通り)
 よって, 和の法則により $9 + 9 = 18$ **答** 18 通り

別解 (1) すべての目の出方は $6 \times 6 = 36$ (通り)

目の積が奇数になるのは, 2 個の目がいずれも奇数のときであるから
 $3 \times 3 = 9$ (通り)

求める場合の数は, 全体から目の積が奇数の場合の数を除けばよいから
 $36 - 9 = 27$ **答** 27 通り

教 p.42

3 6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 のうちの異なる 3 個を並べて, 3 桁の整数を作るとき, 次のような整数は何個作れるか。

- (1) 5 の倍数 (2) 320 より大きい数

指針 順列の考え方の利用

- (1) 一の位が 0 の場合と 5 の場合に分けて考える。
 (2) 百の位が 3, 4, 5 の場合に分けて考える。

解答 (1) 一の位は, 数字 0, 5 のいずれかである。

[1] 一の位の数字が 0 の場合

百, 十の位には, 残り 5 個の数字から 2 個取って並べるから, その並べ方は ${}_5P_2$ 通りある。

[2] 一の位の数字が 5 の場合

百の位は, 0 と一の位の数字以外の 4 個の数字のどれかであるから, その選び方は 4 通りある。

そのどの場合に対しても, 十の位は, 一の位と百の位の数字以外の 4 個の数字のどれかであるから, その選び方は 4 通りある。

[1], [2] から, 求める個数は, 積の法則と和の法則より

$${}_5P_2 + 4 \times 4 = 5 \cdot 4 + 16 = 36 \quad \text{答} \quad 36 \text{ 個}$$

(2) 百の位は, 数字 3, 4, 5 のどれかである。

[1] 百の位の数字が 4, 5 のいずれかの場合

十, 一の位には, 残り 5 個の数字から 2 個取って並べるから, その並べ方は ${}_5P_2$ 通りある。

[2] 百の位の数字が 3 で, 十の位の数字が 4, 5 のいずれかの場合

一の位は, 残り 4 個の数字のどれかであるから, その選び方は 4 通りある。

[3] 百の位の数字が 3 で, 十の位の数字が 2 の場合

一の位は, 数字 1, 4, 5 のどれかであるから, その選び方は 3 通りある。

[1] ~ [3] から, 求める個数は, 積の法則と和の法則より

$$2 \times {}_5P_2 + 2 \times 4 + 3 = 2 \times 5 \cdot 4 + 8 + 3 = 51 \quad \text{答} \quad 51 \text{ 個}$$

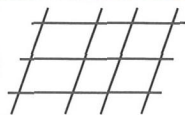
4 集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ の部分集合の個数を求めよ。

指針 重複順列 各要素について、部分集合に含まれるか含まれないかを考える。

解答 7 個の要素について、部分集合に含まれる、含まれないのどちらかであるから、その選び方は 2 通りある。よって、求める個数は、2 個から 7 個取る重複順列の総数に等しいから

$$2^7 = 128 \quad \text{答} \quad 128 \text{ 個}$$

5 右の図のように、4 本の平行線とそれらに交わる 3 本の平行線がある。これらの平行線で作られる平行四辺形は、全部で何個あるか。



指針 図形と組合せ 1 つの平行四辺形は、2 本の横方向の直線と、2 本の斜め方向の直線によって定まる。

したがって、2 本の横方向の直線の選び方の総数と 2 本の斜め方向の直線の選び方の総数を求めて、積の法則を利用する。

解答 横方向の平行線から選んだ 2 本と、それらに交わる平行線から選んだ 2 本によって、平行四辺形は 1 つに決まる。

横方向の 3 本の平行線から 2 本選ぶ方法は ${}_3C_2$ 通り。

そのおのおのについて、それらに交わる 4 本の平行線から 2 本を選ぶ方法は ${}_4C_2$ 通り。

よって、横方向から 2 本、それらに交わる平行線から 2 本を選んで作られる平行四辺形の個数は、積の法則により

$${}_3C_2 \times {}_4C_2 = {}_3C_1 \times {}_4C_2 = 3 \times \frac{4 \cdot 3}{2} = 18 \quad \text{答} \quad 18 \text{ 個}$$

6 次の等式が成り立つことを、組合せの考えを用いて説明せよ。

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$$

指針 ${}_nC_r$ の性質 n 個のものから r 個を取り出すとき、 n 個の中の特定のものの a に着目する。 r 個の中に a を含む場合と含まない場合がある。

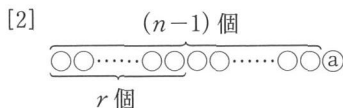
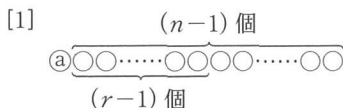
解答 n 個のものから r 個を取り出すとき、 n 個の中の、ある特定のものを a とする。

[1] r 個の中に a を含む組の数は ${}_{n-1}C_{r-1}$

[2] r 個の中に a を含まない組の数は ${}_{n-1}C_r$

また、 n 個から r 個を取る組合せの総数は ${}_nC_r$

よって ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ 終



教 p.42

- 7 立方体の6個の面を、赤青黄白緑黒の6色で塗り分けるとき、塗り方の総数を求めよ。なお、立方体を回転して6つの面の塗り方が一致すれば同じ塗り方とみなす。

指針 円順列 上下の面の2色を固定すると、側面は残りの色の円順列になる。

解答 赤色で塗った面を下の面に固定する。

上の面は赤以外の5色のいずれかで塗ればよいから、上の面の塗り方は5通り。

側面は、残り4色の円順列になるから、立方体の塗り方の総数は

$$5 \times (4-1)! = 5 \times 3! = 30 \quad \text{答} \quad 30 \text{通り}$$

教 p.42

- 8 「大人4人、子ども3人」を題材に場合の数の総数を求める問題を作りたい。次の計算で総数が求められるような問題を1つ作れ。

(1) ${}_4C_2 \times {}_3C_1$

(2) $4! \times 3!$

指針 積の法則を用いて考える。

解答 例

(1) 大人4人から2人、子ども3人から1人を選ぶ選び方の総数を求めよ。

(2) 大人4人と子ども3人について、大人と子どもが交互に1列に並ぶ並び方の総数を求めよ。

第2節 確率

5 事象と確率

A 確率の考え方

まとめ

確率

1 個のさいころを投げると、1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかの目が出るが、どの目が出るかを前もって知ることはできない。しかし、どの目が出ることも同じ程度に期待されるから、たとえば 1 の目が出る割合は $\frac{1}{6}$ であると考えられる。

このように、ある事柄が起こることが期待される程度を表す数値を **確率** という。結果が偶然に左右され、前もって結果を知ることができないときでも、ある事柄が起こる確率を計算できる場合がある。

B 試行と事象

まとめ

1 試行

「さいころを投げる」とか「くじを引く」などのように、同じ条件のもとで繰り返すことができ、その結果が偶然によって決まる実験や観測を **試行** という。

2 事象

試行の結果として起こる事柄を **事象** という。

3 全事象

1 つの試行において、起こりうる結果全体を集合 U で表すとき、その試行におけるどの事象も、 U の部分集合で表すことができる。

U 自身で表される事象を **全事象** という。

4 根元事象

U のただ 1 つの要素からなる集合で表される事象を **根元事象** という。

注意 今後、事象 A を表す集合も A で表し、事象と集合を区別しない。

練習
31

教 p.45

教科書の例 11 の試行において、次の事象を U の部分集合で表せ。

事象 A 「裏が 1 枚も出ない」 事象 B 「表が 1 枚だけ出る」

指針 2 枚の硬貨の表、裏の出方 教科書例 11 では、10 円硬貨 1 枚と 100 円硬貨 1 枚を同時に投げるとき、10 円硬貨は表が出て、100 円硬貨は裏が出ること

を、(表, 裏)で表すことにして、起こりうるすべての場合をあげている。このうち、事象 A 、 B に当てはまるものをそれぞれ $\{ \}$ の中に書き並べる。

解答 事象 A は「裏が1枚も出ない」であるから、(表, 表)の場合である。

よって $A = \{(表, 表)\}$ **答**

同様に、事象 B について

$B = \{(表, 裏), (裏, 表)\}$ **答**

C 同様に確からしいときの確率

まとめ

1 同様に確からしい

ある試行において、どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき、これらの根元事象は 同様に確からしい という。

2 事象 A の起こる確率

ある試行において、各根元事象が同様に確からしいときについて、起こりうるすべての場合の数を N 、事象 A の起こる場合の数を a とすると、事象 A の起こる確率 $P(A)$ は次のように求められる。

$$P(A) = \frac{\text{事象}A\text{の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}} = \frac{a}{N}$$

注意 全事象を U とすると、事象 A の起こる確率は $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$ である。

参考 $P(A)$ の P は、「確率」を意味する probability の頭文字である。

練習 32

教 p.46

1個のさいころを投げるとき、次の場合の確率を求めよ。

- (1) 奇数の目が出る。 (2) 3以上の目が出る。

指針 **さいころと確率** 起こりうるすべての場合の数を N 、事象 A の起こる場合の数を a とすると $P(A) = \frac{a}{N}$ まず、 N を求める。

解答 起こりうるすべての目の出方は、6通りある。

- (1) 奇数の目が出るのは、1, 3, 5の3通りある。

よって、奇数の目が出る確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ **答** ← 約分して求める。

- (2) 3以上の目が出るのは、3, 4, 5, 6の4通りある。

よって、3以上の目が出る確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **答**

注意 (1) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とし、奇数の目が出る事象を A とすると、

$A = \{1, 3, 5\}$ から $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ← 要素の個数から求める。

D いろいろな事象の確率

教 p.46

深める

教科書の例 13 について、次の考え方は誤りである。その理由を説明してみよう。

さいころの目の和は 2 から 12 までの 11 通りであるから、目の和が 5 になる確率は $\frac{1}{11}$ である。

解答 例 2 個のさいころを投げるとき、全事象を U とすると、 $n(U) = 6 \times 6 = 36$
 $n(U) \neq 11$ より、全事象のとり方が間違っているから。

練習
33

教 p.46

3 枚の硬貨を同時に投げるとき、そのうち 1 枚だけ表が出る確率を求めよ。

指針 硬貨と確率 3 枚の硬貨を区別して考える。

解答 3 枚の硬貨の表裏の出方は、 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (通り)

1 枚だけ表が出るのは、以下の 3 通り。

(表, 裏, 裏), (裏, 表, 裏), (裏, 裏, 表)

よって、1 枚だけ表が出る確率は $\frac{3}{8}$ **答**

練習
34

教 p.46

2 個のさいころを同時に投げるとき、次の場合の確率を求めよ。

(1) 目の和が 7 になる。 (2) 2 個とも偶数の目が出る。

指針 2 個のさいころと確率 2 個のさいころを投げる場合も、それぞれのさいころの目を区別する。2 個のさいころを A, B として、(A の目, B の目) のように目の出方を表す。図をかくて確認する。

解答 2 個のさいころの目の出方は

$6 \times 6 = 36$ (通り)

(1) 目の和が 7 になるのは、以下の
6 通り。

(1, 6), (2, 5), (3, 4),

(4, 3), (5, 2), (6, 1)

よって、求める確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ **答**

A \ B	1	2	3	4	5	6
	○	○	○	○	○	●
2	○	○	○	○	●	○
3	○	○	○	●	○	○
4	○	○	●	○	○	○
5	○	●	○	○	○	○
6	●	○	○	○	○	○

- (2) 偶数の目が出るのは、2, 4, 6 の
3 通りある。
2 個とも偶数の目が出るのは
 $3 \times 3 = 9$ (通り)
よって、求める確率は $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ 答

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	○	○	○	○	○	○
2	○	●	○	●	○	●
3	○	○	○	○	○	○
4	○	●	○	●	○	●
5	○	○	○	○	○	○
6	○	●	○	●	○	●

1 章

場合の数と確率

練習 35

教 p.47

A, B の 2 人を含む 4 人が、くじ引きで順番を決めて横 1 列に並ぶとき、次の場合の確率を求めよ。

- (1) A が左端に並ぶ。 (2) B が左端, A が右端に並ぶ。

指針 順列と確率 順列の考え方を利用する。

解答 4 人の並び方は、4! 通りある。

- (1) A が左端に並ぶとき、A 以外の 3 人の並び方は 3! 通りある。

よって、求める確率は

$$\frac{3!}{4!} = \frac{1}{4} \quad \text{答}$$

- (2) A, B 以外の 2 人の並び方は、2! 通りある。

よって、求める確率は

$$\frac{2!}{4!} = \frac{1}{12} \quad \text{答}$$

練習 36

教 p.47

大人 6 人、子ども 4 人の合計 10 人の中から抽選で 4 人を選ぶとき、次のように選ばれる確率を求めよ。

- (1) 大人が 2 人、子どもが 2 人 (2) 全員が子ども

指針 選び方と確率 積の法則により、選び方の総数を求める。

解答 10 人から 4 人の選び方は、 ${}_{10}C_4$ 通りある。

- (1) 大人が 2 人、子どもが 2 人の選び方は、 ${}_6C_2 \times {}_4C_2$ 通りある。

よって、求める確率は

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{3}{7} \quad \text{答}$$

- (2) 子ども 4 人の選び方は、 ${}_4C_4$ 通り。

よって、求める確率は

$$\frac{{}_4C_4}{{}_{10}C_4} = 1 \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{210} \quad \text{答}$$

6 確率の基本性質

A 積事象と和事象

まとめ

1 積事象 $A \cap B$

事象 A と B がともに起こる事象を 積事象 といい, $A \cap B$ で表す。

2 和事象 $A \cup B$

事象 A または B が起こる事象を 和事象 といい, $A \cup B$ で表す。

練習
37

教 p.48

1 から 10 までの番号札 10 枚から 1 枚引くとき, 「奇数の番号を引く」という事象を A , 「7 以上の番号を引く」という事象を B とする。積事象 $A \cap B$, 和事象 $A \cup B$ を集合で表せ。

指針 積事象と和事象 事象 A , B を集合で表すと, 積事象 $A \cap B$ は, 共通部分 $A \cap B$, 和事象 $A \cup B$ は, 和集合 $A \cup B$ で表される。

解答 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $B = \{7, 8, 9, 10\}$

積事象 $A \cap B$ は 「奇数の番号かつ 7 以上の番号を引く」

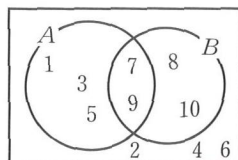
和事象 $A \cup B$ は 「奇数の番号または 7 以上の番号を引く」

という事象である。

よって

$$A \cap B = \{7, 9\} \quad \text{答}$$

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{答}$$



B 排反事象

まとめ

1 排反事象

2 つの事象 A , B が決して同時に起こらないこともある。このとき, A , B は互いに ^{はいはん}排反 である, または, A , B は互いに 排反事象 であるという。 A , B が互いに排反であることは, $A \cap B = \emptyset$ と同じである。

2 空事象

空集合 $\emptyset$ で表される事象を 空事象 という。空事象は決して起こらない事象である。

練習
38

教 p.49

1 個のさいころを投げるとき、「偶数の目が出る」という事象を A ，「2 以下の目が出る」という事象を B ，「3 の倍数の目が出る」という事象を C とする。どの事象とどの事象が互いに排反であるか。

指針 排反事象 2 つの事象が決して同時に起こらないとき、排反であるという。

解答 $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{3, 6\}$

よって $A \cap B = \{2\}$, $B \cap C = \emptyset$, $C \cap A = \{6\}$

したがって、互いに排反であるのは 事象 B と事象 C である。 答

C 確率の基本性質

まとめ

確率の基本性質

1 どんな事象 A についても $0 \leq P(A) \leq 1$

とくに、空集合 $\emptyset$ について $P(\emptyset) = 0$

全事象 U について $P(U) = 1$

2 事象 A, B が互いに排反であるとき $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

注意 2 を確率の 加法定理 という。

3 つ以上の事象については、どの 2 つの事象も互いに排反であるとき、これらは互いに排反であるという。

3 つ以上の排反な事象についても、2 つの場合の加法定理と同様なことが成り立つ。

練習
39

教 p.50

教科書の例 15 のくじ引きを 1 回行うとき、次の場合の確率を求めよ。

- (1) 3 等または 4 等が当たる。
- (2) 2 等から 4 等までのいずれかが当たる。

指針 確率の加法定理

(1) A, B が互いに排反であるとき $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(2) A, B, C が互いに排反であるとき
 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

解答 教科書例 15 のくじを 1 本引くとき、各等が当たる事象は互いに排反である。

- (1) くじを 1 本引くとき、3 等または 4 等が当たる確率は、確率の加法定理により

$$\frac{10}{100} + \frac{20}{100} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} \quad \text{答}$$

- (2) くじを 1 本引くとき、2 等から 4 等までのいずれかが当たる確率は、確率の加法定理により

$$\frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{20}{100} = \frac{35}{100} = \frac{7}{20} \quad \text{答}$$

練習
40

教 p.51

赤玉 2 個、白玉 3 個、青玉 4 個の入った袋から、3 個の玉を同時に取り出すとき、3 個とも同じ色である確率を求めよ。

指針 **加法定理の利用** 「3 個とも白玉である」、「3 個とも青玉である」という 2 つの事象の和事象について加法定理を利用する。

解答 「3 個とも同じ色である」という事象は、「3 個とも白玉である」という事象 A 、「3 個とも青玉である」という事象 B の和事象 $A \cup B$ である。 A 、 B は互いに排反であるから、確率の加法定理により

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{{}_3C_3}{{}_9C_3} + \frac{{}_4C_3}{{}_9C_3} = \frac{1}{84} + \frac{4}{84} = \frac{5}{84} \quad \text{答} \end{aligned}$$

D 余事象とその確率

まとめ

1 余事象

全事象を U とする。事象 A に対して、「 A が起こらない」という事象を、 A の余事象 といい、 $\bar{A}$ で表す。

2 余事象と確率

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \text{すなわち} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

練習
41

教 p.52

1 から 200 までの 200 枚の番号札から 1 枚引くとき、3 の倍数でない番号を引く確率を求めよ。

指針 **余事象の確率** 「3 の倍数である」という事象を A とすると、「3 の倍数でない」という事象は $\bar{A}$ である。 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

解答 「3の倍数でない」という事象は、「3の倍数である」という事象の余事象である。

$$200 \div 3 = 66 \text{ 余り } 2 \text{ より, } 3 \text{ の倍数の番号を引く確率は } \frac{66}{200}$$

$$\text{よって, 求める確率は } 1 - \frac{66}{200} = 1 - \frac{33}{100} = \frac{67}{100} \quad \text{答}$$

練習
42

教 p.52

2個のさいころを同時に投げるとき、次の場合の確率を求めよ。

- (1) 少なくとも1個は2の目が出る。
- (2) 異なる目が出る。

指針 余事象の確率

- (1) 「少なくとも～」の確率は、余事象を考えるとよい。
- (2) 異なる目が出る場合と、同じ目が出る場合とでは、同じ目が出る場合の数を求める方が簡単である。「同じ目が出る」という事象を考えて、その余事象を考えるとよい。

解答 (1) 2個の目がともに2でない確率は

$$\frac{5 \times 5}{6 \times 6} = \frac{25}{36}$$

求めるのはこの余事象の確率であるから

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \quad \text{答}$$

(2) 2個とも同じ目である確率は

$$\frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

求めるのはこの余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \quad \text{答}$$



「少なくとも～」の確率を求めるときは、余事象が使えることが多いよ。

E 一般の和事象の確率

まとめ

一般の和事象の確率

2つの事象A, Bが互いに排反でないとき

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

練習
43

1 から 50 までの 50 枚の番号札から 1 枚引くとき、その番号が次のような数である確率を求めよ。

- (1) 3 の倍数または 4 の倍数
- (2) 3 の倍数でも 4 の倍数でもない数

指針 一般の和事象の確率 「3 の倍数である」、「4 の倍数である」という事象をそれぞれ A 、 B とすると、 $A \cap B \neq \emptyset$ であるから

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ を利用する。

また、「3 の倍数でも 4 の倍数でもない」という事象は、 $\overline{A \cap B}$ であるから、 $\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$ すなわち $A \cup B$ の余事象である。

解答 「3 の倍数である」という事象を A 、「4 の倍数である」という事象を B とすると、

$$A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 16\}, \quad n(A) = 16$$

$$B = \{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, 4 \cdot 3, \dots, 4 \cdot 12\}, \quad n(B) = 12$$

$$\text{また } A \cap B = \{12 \cdot 1, 12 \cdot 2, 12 \cdot 3, 12 \cdot 4\}, \quad n(A \cap B) = 4$$

全事象を U とすると

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{16}{50}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{12}{50}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{4}{50}$$

(1) 求める確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{16}{50} + \frac{12}{50} - \frac{4}{50}$$

$$= \frac{24}{50} = \frac{12}{25} \quad \text{答}$$

(2) 「3 の倍数でも 4 の倍数でもない」という事象は $\overline{A \cap B}$ である。

$\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$ から、求める確率は $P(\overline{A \cup B})$ である。

よって $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$$= 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25} \quad \text{答}$$

7 独立な試行と確率

A 独立な試行の確率

まとめ

1 独立

いくつかの試行において、どの試行の結果も他の試行の結果に影響を与えないとき、これらの試行は **独立** であるという。

2 独立な試行の確率

2つの試行SとTが独立であるとき、Sで事象Aが起こり、かつTで事象Bが起こる確率 p は、 $P(A)$ と $P(B)$ の積に等しい。

$$p = P(A) \times P(B)$$

注意 独立な3つ以上の試行についても、上と同様なことが成り立つ。

練習
44

教 p.55

2枚の硬貨と1個のさいころを投げるとき、次の場合の確率を求めよ。

- (1) 硬貨は2枚とも表が出て、さいころは偶数の目が出る。
- (2) 硬貨は1枚だけ表が出て、さいころは2以下の目が出る。

指針 **独立な試行の確率** 2枚の硬貨を投げる試行と1個のさいころを投げる試行は、互いに影響を与えないから、独立な試行である。

解答 2枚の硬貨を投げる試行と1個のさいころを投げる試行は独立である。2枚の硬貨を投げるとき、表裏の出方は

(表, 表), (表, 裏), (裏, 表), (裏, 裏)

の4通りある。

- (1) 「硬貨は2枚とも表が出て、さいころは偶数の目が出る」という事象の確

率は $\frac{1}{4} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{8}$ 答

- (2) 「硬貨は1枚だけ表が出て、さいころは2以下の目が出る」という事象の

確率は $\frac{2}{4} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ 答

練習
45

1枚の硬貨を3回続けて投げるとき、次の確率を求めよ。

- (1) 3回とも表が出る確率 (2) 少なくとも1回は裏が出る確率

指針 独立な試行の確率 1回目に投げる試行, 2回目に投げる試行, 3回目に投げる試行の3つの試行は独立である。

解答 (1) 3回とも表が出る確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad \text{答}$$

- (2) 少なくとも1回は裏が出る確率は

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \quad \text{答}$$

←「3回とも表が出る」の余事象

練習
46

教科書の例題11において、次の確率を求めよ。

- (1) Aから赤玉, Bから白玉を取り出す確率
(2) A, Bから取り出す玉の色が異なる確率

指針 独立な試行の確率 Aの袋には赤玉3個と白玉2個, Bの袋には赤玉2個と白玉4個が入っている。A, Bの袋から1個ずつ玉を取り出すときの確率を考える。Aから玉を取り出す試行と, Bから玉を取り出す試行は独立である。

解答 Aの袋から玉を1個取り出す試行と, Bの袋から玉を1個取り出す試行は独立である。

- (1) Aの袋から赤玉を取り出す確率は $\frac{3}{5}$

$$Bの袋から白玉を取り出す確率は \frac{4}{6}$$

$$\text{よって、求める確率は } \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \quad \text{答}$$

- (2) (1)の場合と, Aから白玉, Bから赤玉を取り出す場合がある。

Aから白玉, Bから赤玉を取り出す確率は

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{30}$$

これらの事象は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{12}{30} + \frac{4}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \quad \text{答}$$

別解 (2) 「同じ色になる」という事象の余事象であるから、教科書例題11より

$$1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15} \quad \text{答}$$

B 反復試行の確率

まとめ

1章

場合の数と確率

1 反復試行

1 個のさいころを何回か繰り返し投げる場合のように、同じ条件のもとでの試行の繰り返しを 反復試行 という。

1 つの試行を何回か繰り返すとき、これらの試行は独立である。

2 反復試行の確率

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする。

この試行を n 回行う反復試行で、 A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_nC_rp^r(1-p)^{n-r}$$

練習
47

教 p.58

1 個のさいころを 4 回投げるとき、1 の目がちょうど 3 回出る確率を求めよ。

指針 反復試行の確率 ${}_nC_rp^r(1-p)^{n-r}$ にあてはめて求める。

$$n=4, r=3, p=\frac{1}{6}$$

解答 さいころを 1 回投げるとき、1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$

よって、4 回投げて 1 の目がちょうど 3 回出る確率は

$${}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-3}=4\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\frac{5}{6}=\frac{5}{324} \quad \text{答}$$

練習
48

教 p.58

赤玉 6 個、白玉 4 個の入った袋から玉を 1 個取り出し、色を見てからもとにもどす。この試行を 5 回行うとき、次の確率を求めよ。

(1) 赤玉が 4 回以上出る確率

(2) 5 回目に 2 度目の赤玉が出る確率

指針 反復試行の確率と加法定理

(1) 赤玉がちょうど 4 回出る事象と、赤玉が 5 回出る事象は互いに排反であるから、加法定理により求める。

(2) 4 回目までに赤玉がちょうど 1 回出て、5 回目に 2 度目の赤玉が出る場合の確率を求める。

解答 1回の試行で、赤玉が出る確率は $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

(1) 5回のうち赤玉が4回以上出るのは、次の場合である。

赤玉がちょうど4回出る、または赤玉が5回出る

これらの事象は互いに排反であるから、求める確率は

$${}_5C_4 \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{5-4} + \left(\frac{3}{5}\right)^5 = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^5 \\ = \frac{810}{3125} + \frac{243}{3125} = \frac{1053}{3125} \quad \text{答}$$

(2) 5回目に2度目の赤玉が出るのは、4回目までに赤玉がちょうど1回出て、5回目に2度目の赤玉が出る場合である。

よって、求める確率は

$${}_4C_1 \left(\frac{3}{5}\right) \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{4-1} \times \frac{3}{5} = 4 \times \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \frac{3}{5} = \frac{288}{3125} \quad \text{答}$$

練習
49

教 p.59

数直線上を動く点Pが原点の位置にある。1枚の硬貨を投げて、表が出たときはPを正の向きに2だけ進め、裏が出たときはPを負の向きに3だけ進める。硬貨を5回投げ終わったとき、Pが原点にもどっている確率を求めよ。

指針 **反復試行の確率** 5回のうち、表の回数を r 回とすると、裏の回数は $(5-r)$ 回である。

よって、5回投げ終わったときのPの座標は $2r + (-3)(5-r)$ である。

解答 硬貨を1回投げるとき、表が出る確率は $\frac{1}{2}$

5回のうち表が r 回出たとすると、裏は $(5-r)$ 回出るから、5回で原点にもどるのは $2r + (-3)(5-r) = 0$ が成り立つときである。

これを解くと $r = 3$

よって、5回のうち表がちょうど3回出るときである。

したがって、求める確率は

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16} \quad \text{答}$$

8 条件付き確率

A 条件付き確率

まとめ

条件付き確率

1つの試行における2つの事象 A , B について、事象 A が起こったとして、そのときに事象 B が起こる確率を、 A が起こったときの B が起こる 条件付き確率 といい、 $P_A(B)$ で表す。

全事象を U とする。2つの事象 A , B について、条件付き確率 $P_A(B)$ は、 A を全事象としたときに、事象 B の起こる確率であり

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \quad \text{ただし, } n(A) \neq 0$$

上の式の右辺の分母と分子を、それぞれ $n(U)$ で割ると

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{ただし, } P(A) \neq 0$$

練習
50

教 p.60

教科書の例 21 において、条件付き確率 $P_B(A)$ を求めよ。

指針 条件付き確率 引いた番号札が偶数であることがわかっているとき、その番号札が青色の札である確率を求める。

解答 偶数の札は6枚あり、その中で青色の札は3枚あるから

$$P_B(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{答}$$

練習
51

教 p.61

大人と子どもの人数の比が3:2であるグループに、ある提案をしたところ、子どもで賛成した人数は全体の15%であった。このグループの子どもの中から1人を選び出すとき、その人が提案に賛成である確率を求めよ。

指針 条件付き確率 グループ全体から選び出された1人が、子どもであるという事象を A 、提案に賛成であるという事象を B として、 $P_A(B)$ を求める。

解答 グループ全体から選び出された1人が、子どもであるという事象を A 、提案に賛成であるという事象を B とすると

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(A \cap B) = \frac{15}{100}$$

よって、求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{15}{100} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \quad \text{答}$$

B 確率の乗法定理

まとめ

乗法定理

2つの事象 A , B がともに起こる確率 $P(A \cap B)$ は

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

練習
52

教 p.62

教科書の例 22 において、次の確率を求めよ。

- (1) A が当たり、 B がはずれる確率
- (2) A がはずれ、 B が当たる確率
- (3) 2人ともはずれる確率

指針 乗法定理の利用 引いたくじをもとにもどさないから、 A , B がくじを引くとき、当たりとはずれのくじの本数は次のようになる。

- | | |
|-------------------------|---------------------|
| (1) A 当たり 4 本、はずれ 6 本 | B 当たり 3 本、はずれ 6 本 |
| (2) A 当たり 4 本、はずれ 6 本 | B 当たり 4 本、はずれ 5 本 |
| (3) A 当たり 4 本、はずれ 6 本 | B 当たり 4 本、はずれ 5 本 |

解答 A が当たるという事象を A , B が当たるという事象を B とする。また、 A がはずれるという事象を C , B がはずれるという事象を D とする。

- (1) 求める確率 $P(A \cap D)$ は、乗法定理により

$$P(A \cap D) = P(A)P_A(D)$$

A が当たったときに、残りのくじは 9 本ではずれくじを 6 本含むから

$$P_A(D) = \frac{6}{9}$$

よって $P(A \cap D) = P(A)P_A(D) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15} \quad \text{答}$

- (2) 求める確率 $P(C \cap B)$ は、乗法定理により

$$P(C \cap B) = P(C)P_C(B)$$

A がはずれたときに、残りのくじは 9 本で当たりくじを 4 本含むから

$$P_C(B) = \frac{4}{9}$$

よって $P(C \cap B) = P(C)P_C(B) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15} \quad \text{答}$

- (3) 求める確率 $P(C \cap D)$ は、乗法定理により

$$P(C \cap D) = P(C)P_C(D)$$

Aがはずれたときに、残りのくじは9本ではずれくじを5本含むから

$$P_c(D) = \frac{5}{9}$$

$$\text{よって } P(C \cap D) = P(C)P_c(D) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3} \quad \text{答}$$

練習
53

教 p.63

赤玉3個、白玉10個の入った袋から、玉を1個ずつ3個取り出す。ただし、取り出した玉はもとにもどさない。このとき、取り出した玉がすべて赤玉である確率を求めよ。

指針 乗法定理の利用 3つの事象が起こる場合の確率について、乗法定理を用いて求める。

解答 乗法定理により

$$\frac{3}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{286} \quad \text{答}$$

練習
54

教 p.63

当たりくじ5本を含む12本のくじを、A、Bの2人がこの順に1本ずつ引く。ただし、引いたくじはもとにもどさない。このとき、Bが当たる確率を求めよ。

指針 乗法定理と加法定理 引いたくじはもとにもどさないから、A、Bがくじを引くとき、当たりとはずれのくじの本数は次のようになる。

[1] Aが当たりを引くとき

A 当たり5本、はずれ7本 B 当たり4本、はずれ7本

[2] Aがはずれを引くとき

A 当たり5本、はずれ7本 B 当たり5本、はずれ6本

解答 Bが当たる事象は、Aが当たり、Bも当たる事象と、Aがはずれ、Bが当たる事象の和事象である。

$$[1] \quad A \text{ が当たり, } B \text{ も当たる確率は } \frac{5}{12} \times \frac{4}{11}$$

$$[2] \quad A \text{ がはずれ, } B \text{ が当たる確率は } \frac{7}{12} \times \frac{5}{11}$$

[1], [2]は互いに排反であるから、Bが当たる確率は

$$\frac{5}{12} \times \frac{4}{11} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{55}{132} = \frac{5}{12} \quad \text{答}$$

研究 原因の確率

まとめ

原因の確率

下の練習1で求めた条件付き確率 $P_E(A)$ は、次のような確率である。

事象 E が起こる原因として事象 A , B の2つが考えられるとき、事象 E が起こったことを知って、それが原因 A から起こったと考えられる確率
このことから、この $P_E(A)$ を **原因の確率** ということがある。

練習
1

教 p.64

ある集団は2つのグループ A , B から成り、 A の占める割合は20%である。また、事象 E が発生する割合が、 A では2%, B では3%である。この集団から選び出した1個について、事象 E が発生する確率を求めよ。また、事象 E が発生したときに、選び出された1個が A のグループに属している確率を求めよ。

指針 原因の確率 $P(A) = \frac{20}{100}$, $P(B) = \frac{100-20}{100}$, $P_A(E) = \frac{2}{100}$, $P_B(E) = \frac{3}{100}$

である。 $P(E)$ と $P_E(A)$ を求める。

解答 選び出した1個が、グループ A のものであるという事象を A , グループ B のものであるという事象を B とすると

$$P(A) = \frac{1}{5}, \quad P(B) = \frac{4}{5},$$

$$P_A(E) = \frac{2}{100}, \quad P_B(E) = \frac{3}{100}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) \\ &= P(A)P_A(E) + P(B)P_B(E) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad P(E) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{100} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{100} = \frac{14}{500} = \frac{7}{250} \quad \text{答}$$

事象 E が発生したときに、選び出された1個が A のグループに属している確率は

$$\begin{aligned} P_E(A) &= \frac{P(E \cap A)}{P(E)} = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{2}{500} \div \frac{14}{500} \\ &= \frac{1}{7} \quad \text{答} \end{aligned}$$

コラム 直感と確率

教 p.65

練習

教科書のコラム「直感と確率」で考えたゲームについて、開けるドアを変更して賞品を得る確率と、変更しないで賞品を得る確率を求めてみよう。どちらの確率が大きいだろうか。

指針 開けるドアを変更して賞品を得ることができるのは、最初にはずれのドアを選んだときであり、開けるドアを変更しないで賞品を得ることができるのは、最初に当たりのドアを選んだときである。

解答 最初に2つあるはずれのドアを選んでいるときに、開けるドアを変更して賞品を得ることができるから、変更して賞品を得る確率は $\frac{2}{3}$

最初に当たりのドアを選んでいるときに、開けるドアを変更しないで賞品を得ることができるから、変更しないで賞品を得る確率は $\frac{1}{3}$

したがって、開けるドアを変更して賞品を得る確率の方が大きい。 

9 期待値

A 期待値

まとめ

期待値

一般に、ある試行の結果に応じて、 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ のどれか1つの値をとる数量 X があり、各値をとる確率が

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ただし $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$

あるとき、 $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \dots + x_np_n$ を数量 X の 期待値 という。

X のとる値と確率が右の表の

ようなとき、 X の期待値は、

次の式で与えられる。

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n	1

$$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \dots + x_np_n$$

練習
55

2 個のさいころを投げて出る目の和を考える。下の表を完成させて、出る目の和の期待値を求めよ。

和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$		$\frac{6}{36}$			$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

指針 期待値の計算 出る目の和を $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{11}$ とし、各値をとる確率を $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{11}$ として、

$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_{11} p_{11}$ を計算する。

解答 確率の表は下になる。

和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

したがって、出る目の和の期待値は

$$\begin{aligned}
 & 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} \\
 & + 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} \\
 & = \frac{252}{36} = 7 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

練習
56

5 枚の硬貨を同時に投げて、表の出た硬貨の枚数が 5, 4, 3 の場合に、それぞれ得点 40, 16, 4 を得るが、それ以外の場合には得点は得られないとする。得点の期待値を求めよ。

指針 硬貨を投げるときの得点の期待値 求めるのは得点の期待値であるから、数量 X は得点であり、 X のとりうる値は、40, 16, 4, 0 である。それぞれの値をとる確率を求め、得点の期待値を計算する。

解答 得点を X 点とすると、 X のとりうる値は、40, 16, 4, 0 である。

X が 40 となるのは、表の出た硬貨の枚数が 5 のときであるから、

$$\text{その確率は } \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

X が 16 となるのは、表の出た硬貨の枚数が 4 のときであるから、

$$\text{その確率は } {}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$$

X が4となるのは、表の出た硬貨の枚数が3のときであるから、

$$\text{その確率は } {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$$

また、 X が0となるのは、表の出た硬貨の枚数が5, 4, 3以外のときであるから、余事象の確率により、

$$\text{その確率は } 1 - \left(\frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32}\right) = \frac{16}{32}$$

よって、次のような表ができる。

X	40	16	4	0	計
確率	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{16}{32}$	1

したがって、求める期待値は

$$40 \times \frac{1}{32} + 16 \times \frac{5}{32} + 4 \times \frac{10}{32} + 0 \times \frac{16}{32} = \frac{160}{32} = 5 \quad \text{答} \quad 5 \text{点}$$

B 期待値の応用

まとめ

期待値の利用

期待値の考えを、結果が不確実な状況下において、どの選択が有利かを判断する際の基準として利用することができる。

解説 例えば、さいころを投げたり、くじを引いたりした結果に応じて賞金額が決まっているゲームでは、どういう結果になるかは偶然によるので、ゲームを始めるとき、結果は不確実な状況下にあるといえる。

しかし、そのゲームの賞金額の期待値を計算で求めておけば、期待値をもとに判断して、そのゲームでどういう選択をすれば有利かを判断できるのである。

練習 57

教 p.68

次の[1]～[3]の3つの場合の中で、得られる金額の期待値が最も大きいのはどれか。

- [1] 確実に600円得られる場合
- [2] 硬貨を1枚投げて、表が出たら1000円、裏が出たら500円得られる場合
- [3] さいころを1回投げて、200円に出た目を掛けた金額が得られる場合

指針 期待値の大小 それぞれの期待値を求めて、その大小を比べる。

解答 [1]を選んだときの期待値は 600 円

[2]を選んだときの期待値は

$$1000 \times \frac{1}{2} + 500 \times \frac{1}{2} = 750 \quad \text{すなわち} \quad 750 \text{ 円}$$

[3]を選んだときの期待値は

$$200 \times (1+2+3+4+5+6) \times \frac{1}{6} = 700$$

すなわち 700 円

よって、期待値が最も大きいのは、[2] である。 **答**

練習

58

教 p.69

50 円硬貨 3 枚を同時に投げて、表が出た硬貨を全部もらえるゲームがある。1 回のゲームで、受け取る金額の期待値を求めよ。

また、このゲームの参加料が 1 回 80 円のとき、このゲームに参加することは得といえるか。

指針 期待値による判断 受け取る金額の期待値が参加料より大きいときに得であると判定する。

解答 表が出る硬貨の枚数は、0, 1, 2, 3 のいずれかである。

$$\text{表が 0 枚出る確率は} \quad \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\text{表が 1 枚出る確率は} \quad \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$$\text{表が 2 枚出る確率は} \quad \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$$\text{表が 3 枚出る確率は} \quad \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

よって、受け取る金額を X 円とすると、次のような表ができる。

X	0	50	100	150	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

したがって、ゲームに参加したときの受け取る金額の期待値は

$$0 \times \frac{1}{8} + 50 \times \frac{3}{8} + 100 \times \frac{3}{8} + 150 \times \frac{1}{8} = 75$$

すなわち 75 円 **答**

よって、受け取る金額の期待値がゲームの参加料 80 円より小さいから、ゲームに参加することは得であるとはいえない。 **答**

第1章 第2節

問題

1章

場合の数と確率

教 p.70

9 A, B, Cの3人がじゃんけんを1回するとき、次の確率を求めよ。

- (1) Aだけが勝つ確率 (2) 全員が違う手を出す確率
(3) 誰も勝たない、すなわちあいこになる確率

指針 じゃんけんと確率

- (3) あいこになるのは [1] 全員が違う手を出す
[2] 全員が同じ手を出す ときである。

解答 3人の手の出し方は、それぞれ3通りずつあるから、すべての手の出し方は
 $3 \times 3 \times 3 = 27$ (通り)

- (1) Aだけが勝つのは、グー、チョキ、パー ← Aがグー、B、Cが
それぞれで勝つ場合の3通りある。 チョキなど。

よって、求める確率は $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$ 答

- (2) 全員が違う手を出す場合は $3! = 6$ (通り)

よって、求める確率は $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ 答

- (3) あいこになるのは、次の2つの場合である。

[1] 全員が違う手を出す場合 (2)から、その確率は $\frac{2}{9}$

[2] 全員が同じ手を出す場合 3通りあるから、その確率は

$$\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

[1], [2]は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \quad \text{答}$$

教 p.70

10 10本のくじがある。そのうち当たりくじは1等が1本、2等が3本であり、残りははずれくじである。このくじから同時に3本を引くとき、次の確率を求めよ。

- (1) 当たりくじを少なくとも1本引く確率
(2) 1等、2等、はずれくじをそれぞれ1本ずつ引く確率
(3) 2等を2本以上引く確率

指針 くじ引きと確率

- (1) 「少なくとも～」の確率は、余事象の確率に着目すると簡単になることが多い。
- (3) 「2等を2本引く」、「2等を3本引く」という2つの事象は排反であるから、加法定理を用いる。

解答 (1) 3本ともはずれくじである確率は

$$\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{6}$$

よって、求める確率は $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ **答**

- (2) 求める確率は

$$\frac{1 \times {}_3C_1 \times {}_6C_1}{{}_{10}C_3} = 3 \times 6 \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{3}{20} \quad \text{答}$$

- (3) 2等を2本引く確率は

$$\frac{{}_3C_2 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_3} = 3 \times 7 \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{21}{120}$$

2等を3本引く確率は

$$\frac{{}_3C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{120}$$

よって、求める確率は

$$\frac{21}{120} + \frac{1}{120} = \frac{22}{120} = \frac{11}{60} \quad \text{答}$$

教 p.70

- 11** 数直線上を動く点Pが原点の位置にある。1個のさいころを投げて、3の倍数の目が出たときはPを正の向きに1だけ進め、3の倍数でない目が出たときはPを負の向きに1だけ進める。さいころを5回投げ終わったとき、Pの座標が3である確率を求めよ。

指針 反復試行の確率 5回のうち3の倍数の目が r 回出たとすると、3の倍数でない目は $(5-r)$ 回出たから、5回投げ終わったときのPの座標は $1 \cdot r + (-1)(5-r)$

解答 1個のさいころを投げて、3の倍数の目が出る確率は

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

5回のうち、3の倍数の目が r 回出たとすると、3の倍数でない目が $(5-r)$ 回出る。

5回でPの座標が3となるのは

$$1 \cdot r + (-1)(5-r) = 3$$

が成り立つときである。

これを解くと $r=4$

よって、5回のうち3の倍数がちょうど4回出るときである。

したがって、求める確率は

$$\begin{aligned} {}_5C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-4} &= {}_5C_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{2}{3} \\ &= 5 \times \frac{2}{243} = \frac{10}{243} \quad \text{答} \end{aligned}$$

$\leftarrow {}_5C_4 = {}_5C_{5-4}$

教 p.70

12 当たりくじ3本を含む10本のくじを、A、B、Cの3人がこの順に1本ずつ引く。ただし、引いたくじはもとにもどさない。このとき、次の確率を求めよ。

(1) A、Bがはずれ、Cが当たる確率 (2) Cが当たる確率

指針 乗法定理の利用 3つの事象の確率を乗法定理を利用して求める。

(2)はA、Bの当たり、はずれのすべての場合の和事象を求める。

解答 (1) 乗法定理より $\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{7}{40}$ 答

(2) 次の4つの場合がある。

[1] A、B、Cとも当たる場合。

$$\text{その確率は } \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{6}{720}$$

[2] Aがはずれ、B、Cが当たる場合。

$$\text{その確率は } \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{42}{720}$$

[3] Bがはずれ、A、Cが当たる場合。

$$\text{その確率は } \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{42}{720}$$

[4] A、Bがはずれ、Cが当たる場合。

$$\text{その確率は } \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{126}{720}$$

[1]～[4]は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{6}{720} + \frac{42}{720} + \frac{42}{720} + \frac{126}{720} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10} \quad \text{答}$$

13 三者択一式の問題が6問続けて出題される。どの問題でもでたらめに答えを選ぶとき、次のものを求めよ。ただし、各問題でどの答えを選ぶ確率も、それぞれ $\frac{1}{3}$ と考えてよいとする。

- (1) 1問だけ正解する確率 (2) 正解する問題数の期待値

指針 反復試行と期待値 反復試行の確率を利用する。

- (2) 正解する問題数は0, 1, 2, 3, 4, 5, 6のいずれかである。

それぞれの場合の確率を求め、正解する問題数の期待値を計算する。

解答 (1) 1問だけ正解する確率は

$${}_6C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{192}{729} = \frac{64}{243} \quad \text{答}$$

- (2) 正解する問題数は0, 1, 2, 3, 4, 5, 6のいずれかである。

$$0 \text{ 問正解する確率は } \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$$

$$1 \text{ 問だけ正解する確率は } \frac{192}{729}$$

$$2 \text{ 問だけ正解する確率は } {}_6C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{240}{729}$$

$$3 \text{ 問だけ正解する確率は } {}_6C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{160}{729}$$

$$4 \text{ 問だけ正解する確率は } {}_6C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{60}{729}$$

$$5 \text{ 問だけ正解する確率は } {}_6C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{729}$$

$$6 \text{ 問正解する確率は } \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$$

よって、正解する問題数をX問とすると、次のような表ができる。

X	0	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{64}{729}$	$\frac{192}{729}$	$\frac{240}{729}$	$\frac{160}{729}$	$\frac{60}{729}$	$\frac{12}{729}$	$\frac{1}{729}$	1

したがって、正解する問題数の期待値は

$$\begin{aligned}
 & 0 \times \frac{64}{729} + 1 \times \frac{192}{729} + 2 \times \frac{240}{729} + 3 \times \frac{160}{729} \\
 & + 4 \times \frac{60}{729} + 5 \times \frac{12}{729} + 6 \times \frac{1}{729} \\
 & = \frac{1458}{729} = 2
 \end{aligned}$$

すなわち 2問 答

第1章 章末問題 A

1章

場合の数と確率

教 p.71

1. 6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 のうちの異なる 3 個を並べて, 3 桁の整数を作る。3 桁の整数を小さい順に並べるとき, 46 番目の数を求めよ。

指針 順列 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ を利用する。

3 桁の整数を $1\square\square, 2\square\square, 30\square, 31\square, \cdots$ の形に分類して個数を積み上げていく。

解答 3 桁の整数が $1\square\square$ の形のは, $\square\square$ に入る残り 5 個の数字から 2 個取って並べる順列であるから ${}_5P_2 = 20$ (個)

同様に, $2\square\square$ の形のは 20 個。

$3\square\square$ の形のは, 小さい順に

301, 302, 304, 305,

310, 312, 314, 315, $\cdots$

← 301 は $(20+20+1)$ 番目の数。

であるから, 46 番目の数は 312 答

教 p.71

2. 大人 2 人と子ども 4 人が, 円形の 6 人席のテーブルに着席するとき, 次のような並び方は何通りあるか。

(1) 大人 2 人が向かい合う。

(2) 大人 2 人の間に子どもがちょうど 1 人入る。

指針 円順列 大人 1 人を固定して考える。

解答 (1) 大人 1 人の位置を基準にして考えると, もう 1 人の大人の位置はその向かい合う席に決まる。

残りの席に子ども 4 人が座ればよいから, 求める並び方は

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \quad \text{答} \quad 24 \text{ 通り}$$

(2) 大人 1 人の位置を基準にして考えると, もう 1 人の大人の位置は 2 通りある。

残りの席に子ども 4 人が座ればよいから, 求める並び方は

$$2 \times 4! = 2 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48 \quad \text{答} \quad 48 \text{ 通り}$$

3. 0000 から 9999 までの番号のうちで、次のような番号は何個あるか。

- (1) 0101, 0033 のように、同じ数字を 2 個ずつ含むもの
- (2) 1248 のように、異なる数字が左から小さい順に並んでいるもの

指針 同じものを含む順列、組合せの利用

(1) 0 と 1 を 2 個ずつ含むものは、 $\frac{4!}{2!2!}$ 個ある。

また、0 から 9 までの数字から 2 個の選び方は、 ${}_{10}C_2$ 通りある。

(2) 異なる 4 つの数字 1 組が、左から小さい順に並んでいる番号 1 個に対応する。

解答 (1) 0 から 9 までの 10 個の数字から 2 個の選び方は ${}_{10}C_2$ 通り。

この 1 通りについて 2 個ずつ含む数の並べ方は $\frac{4!}{2!2!}$ 通り。

$$\text{よって } {}_{10}C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 270 \quad \text{答 } 270 \text{ 個}$$

(2) 異なる 4 つの数字の組合せ 1 組に対し、4 つの数字が左から小さい順に並んでいる番号 1 個が対応するから、その総数は

$${}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \quad \text{答 } 210 \text{ 個}$$

4. A の袋には白玉 3 個と黒玉 2 個、B の袋には白玉 2 個と黒玉 4 個が入っている。まず、A の袋から玉を 1 個取り出して B の袋に入れる。次に、B の袋から玉を 1 個取り出して A の袋に入れる。このとき、次の確率を求めよ。

- (1) A の袋の中の白玉の個数が増えている確率
- (2) A の袋の中の白玉の個数が変わっていない確率

指針 乗法定理の利用

(1) は A から黒玉を取り出し、B から白玉を取り出す場合である。

(2) は、[1] A から白玉を取り出し、B からも白玉を取り出す場合 と

[2] A から黒玉を取り出し、B からも黒玉を取り出す場合

に分けて考える。また、[1] と [2] は互いに排反である。

解答 (1) A の袋の中の白玉の個数が増えるのは、A から黒玉を取り出し、B から白玉を取り出す場合である。

A の袋から黒玉を取り出し B の袋に入れたとき、B の袋には白玉 2 個と黒

玉 5 個が入っているから、求める確率は $\frac{2}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{35}$ 答

- (2) Aの袋の中の白玉の個数が変わっていない場合は、次の2つの場合である。

[1] Aの袋から白玉を取り出し、Bの袋からも白玉を取り出す場合。

Aの袋から白玉を取り出しBの袋に入れたとき、Bの袋には白玉3個と黒玉4個が入っているから、この場合の確率は $\frac{3}{5} \times \frac{3}{7}$

[2] Aの袋から黒玉を取り出し、Bの袋からも黒玉を取り出す場合。

[1]と同様に考えて、この場合の確率は $\frac{2}{5} \times \frac{5}{7}$

[1], [2]は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{19}{35} \quad \text{答}$$

- 別解** (2) Aの袋の中の白玉の個数が減るのは、Aから白玉を取り出し、Bからは黒玉を取り出す場合であるから、その確率は $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$
 よって、白玉の個数が変わらない確率は、(1)より

$$1 - \left(\frac{4}{35} + \frac{12}{35} \right) = \frac{19}{35} \quad \text{答} \quad \leftarrow \text{余事象とその確率を利用}$$

教 p.71

5. じゃんけんを3人でして、負けた人から順に抜けていき、最後に残った1人を優勝者とする。あいこも1回と数えるとき、次の確率を求めよ。
- (1) 1回目で優勝者が決まる確率
 (2) 1回目終了後に2人残っている確率
 (3) ちょうど3回目で優勝者が決まる確率

指針 じゃんけんと確率

- (1) 1回目に1人だけが勝つ場合である。
 (2) 1回目に1人だけが負ける場合である。
 (3) 1回目、2回目の終了後に残る人数に着目すると、次の3つの場合がある。
 [1] 3人, 3人 [2] 3人, 2人 [3] 2人, 2人

解答 (1) 手の出し方はグー、チョキ、パーの3通りある。

よって、3人の手の出し方は $3 \times 3 \times 3$ 通り。

3人をA, B, Cとすると、1人だけが勝つのはA, B, Cの3通り。そのどの場合に対しても手の出し方は3通りある。

$$\text{よって、求める確率は } \frac{3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3} \quad \text{答}$$

- (2) 1回目に1人だけが負けるのは、(1)と同様に考えて 3×3 通り。

よって、求める確率は $\frac{1}{3}$ 答

(3) 3 回目で優勝者が決まるとき、1 回目と 2 回目には次の 3 つの場合がある。

[1] 1 回目, 2 回目とも 3 人が残る場合

[2] 1 回目は 3 人が残り, 2 回目に 2 人が残る場合

[3] 1 回目に 2 人が残り, 2 回目はあいこの場合

ここで, 3 人でじゃんけんをしてあいこになる確率は, (1), (2) から

$$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

また, 2 人でじゃんけんをしてあいこになる確率は $\frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3}$

[1] の確率は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

[2] の確率は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{27}$

[3] の確率は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{27}$

[1], [2], [3] は互いに排反であるから $\frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{5}{27}$ 答

教 p.71

6. 1 から 5 までの番号札が, それぞれ番号の数だけ用意されている。この中から 1 枚を取り出すとき, 次のどちらを選ぶ方が得といえるか。

① 出た番号と同じ枚数の 100 円硬貨をもらう。

② 5 の番号が出たときだけ 1000 円をもらう。

指針 期待値による判断 それぞれの場合の期待値を求め, 期待値が大きい方を得であると判断する。

解答 ①を選ぶ場合, 受け取る金額の期待値は

$$\begin{aligned} & 100 \times \frac{1}{15} + 200 \times \frac{2}{15} + 300 \times \frac{3}{15} + 400 \times \frac{4}{15} + 500 \times \frac{5}{15} \\ &= \frac{5500}{15} = \frac{1100}{3} \text{ (円)} \end{aligned}$$

②を選ぶ場合, 受け取る金額の期待値は

$$0 \times \frac{10}{15} + 1000 \times \frac{5}{15} = \frac{1000}{3} \text{ (円)}$$

よって, ①の方が受け取る金額の期待値が大きいから, ①を選ぶ方が得といえる。

第1章 章末問題 B

1章

場合の数と確率

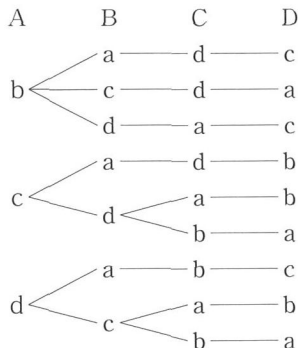
教 p.72

7. A, B, C, Dの4人が品物を1個ずつ持ち寄り、くじ引きで分けることにした。各人が他の人の品物をもらうような分け方は何通りあるか。

指針 完全順列 4人の品物を a, b, c, d として、樹形図をかいて調べる。

解答 A, B, C, Dの4人の品物をそれぞれ a, b, c, d とする。

各人が他の人の品物をもらう場合は、右の樹形図から 9通り 答



教 p.72

8. 次の問いに答えよ。

- (1) 6人がA, Bの2部屋に入る方法は、何通りあるか。ただし、全員が1つの部屋に入ってもよい。
 (2) 6人が2つの組に分かれる方法は何通りあるか。

指針 組分けの問題 (2) (1)の結果から、全員を1つの組に入れる場合を除いて、A, Bの区別をなくす。

解答 (1) 6人それぞれについて、Aに入るかBに入るかの2通りあるから

$$2^6 = 64 \quad \text{答} \quad 64 \text{通り}$$

- (2) (1)の分け方のうち、Aに全員入る方法とBに全員入る方法を除くと
 $64 - 2 = 62$ (通り)

この分け方で、A, Bの区別をなくせばよいから

$$\frac{62}{2!} = 31 \quad \text{答} \quad 31 \text{通り}$$

教 p.72

研究

9. 次のような整数 x, y, z の組は、全部で何個あるか。

- (1) 等式 $x + y + z = 5$ を満たす負でない整数 x, y, z の組
 (2) 等式 $x + y + z = 10$ を満たす正の整数 x, y, z の組

指針 重複組合せ

(1) 2個の|と5個の○を用いて、 x, y, z の組を次のように表す。

$(x, y, z) = (3, 1, 1)$ なら ○○○|○|○

$(x, y, z) = (3, 2, 0)$ なら ○○○|○○|

教科書40ページにより、異なる3個のものから重複を許して5個取って作る組合せの総数に着目する。

(2) 2個の|と10個の○を用いて、○と○の間の9か所から2つ選んで|を入れる。

解答 (1) 異なる3個のものから重複を許して5個取って作る組合せの総数、すなわち5個の○と2個の|を並べる順列の総数に等しいから

$${}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \quad \text{答} \quad 21 \text{ 個}$$

(2) 10個の○を並べる：○○○○○○○○○○○○

このとき、○と○の間の9か所から2つを選んで仕切りを入れて $A|B|C$ としたときの、 A, B, C の部分にある○の数をそれぞれ x, y, z とすると、組が1つ決まる。

よって、求める正の整数 x, y, z の組は ${}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36 \quad \text{答} \quad 36 \text{ 個}$

別解 (2) $x-1=X, y-1=Y, z-1=Z$ とおくと $X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$

$x=X+1, y=Y+1, z=Z+1$ を $x+y+z=10$ に代入して整理すると

$$X+Y+Z=7$$

等式を満たす負でない整数 X, Y, Z の組の総数は、異なる3個のものから重複を許して7個取って作る組合せの総数、すなわち7個の○と2個の|を並べる順列の総数に等しい。

よって ${}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36 \text{ (個)} \quad \text{答}$

教 p.72

10. 3個のさいころを同時に投げるとき、次の確率を求めよ。

(1) 出る目の最大値が5以下である確率

(2) 出る目の最大値が5である確率

指針 **さいころの目の最大値の確率** 出る目の最大値が5であるのは(すべての目が5以下) - (すべての目が4以下)により求められる。

解答 3個のさいころを同時に投げるときの目の出方の総数は 6^3 である。

(1) 3個の目の最大値が5以下である場合の数は、1, 2, 3, 4, 5から重複を許して3個取り出す順列の総数に等しいから、 5^3 である。

よって、求める確率は $\frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216} \quad \text{答}$

(2) 事象 A , B , C を A : 最大値が 5 以下である B : 最大値が 4 以下である C : 最大値が 5 であるとすると, $A=B \cup C$ である。 B と C は互いに排反であるから $P(A)=P(B)+P(C)$ したがって, 求める確率 $P(C)$ は $P(C)=P(A)-P(B)$

$$(1) \text{ から } P(A) = \frac{5^3}{6^3}$$

最大値が 4 以下である場合の数は, 1, 2, 3, 4 から重複を許して 3 個取り出す順列の総数に等しいから, 4^3 である。

$$\text{よって } P(B) = \frac{4^3}{6^3}$$

ゆえに, 求める確率は

$$P(C) = P(A) - P(B) = \frac{5^3}{6^3} - \frac{4^3}{6^3} = \frac{125-64}{216} = \frac{61}{216} \quad \text{答}$$

教 p.72

11. 白玉 2 個と黒玉 1 個が入っている袋 A と, 空の袋 B がある。まず, 袋 A から 1 個を取り出して袋 B に入れる。次に, 袋 A の中の 1 個の玉と袋 B の玉の交換を 2 回行うとき, 袋 B の中に黒玉が入っている確率を求めよ。

指針 乗法定理の利用 最初に袋 B に白玉が入った場合と, 黒玉が入った場合とに分けて考える。

解答 次の 2 つの場合がある。

[1] 最初, B に白玉が入った場合。

後の 2 回で A から取り出される玉は, 白玉, 黒玉の順である。

$$\text{よって, その確率は } \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

[2] 最初, B に黒玉が入った場合。

後の 2 回で A から取り出される玉は, 白玉, 黒玉の順である。

$$\text{よって, その確率は } \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$[1], [2] \text{ は互いに排反であるから, 求める確率は } \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{答}$$

12. 3つの箱A, B, Cがある。Aの中には赤玉3個と白玉2個が、Bの中には赤玉3個と白玉4個が入っている。まず、A, Bからそれぞれ1個ずつ玉を取り出して、空箱Cの中に入れる。次に、Cから1個取り出した玉が赤玉であったとき、それがAから取り出した赤玉である確率を求めよ。

指針 条件付き確率 Cから取り出した玉が赤玉であるのは

[1] Aの赤玉 [2] Bの赤玉 の2つの場合がある。

Cから赤玉を取り出すという事象をC, CからAの玉を取り出す事象をAとすると、求める条件付き確率は

$$P_c(A) = \frac{P(C \cap A)}{P(C)}$$

解答 Cから1個取り出した玉が赤玉であるという事象は、次の2つの事象の和事象である。

[1] Aの赤玉である場合。

$$\text{その確率は} \quad \frac{3}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{70}$$

[2] Bの赤玉である場合。

$$\text{その確率は} \quad \frac{3}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{70}$$

よって、Cから取り出した玉が赤玉である確率は

$$\frac{21}{70} + \frac{15}{70} = \frac{36}{70} = \frac{18}{35}$$

したがって、Cから1個取り出した玉が赤玉であったとき、それがAから取り出した赤玉である確率は

$$\frac{21}{70} \div \frac{18}{35} = \frac{7}{12} \quad \text{答}$$